ইউনিট
৭

সরল দোলন গতি
Simple Harmonic Motion

ভূমিকা (Introduction)

যে গতি একটি নির্দিষ্ট সময়ের ব্যবধানে পুনরাবৃত্ত হয় তাকে পর্যাবৃত্ত গতি বলা হয়।

সূর্যের চারদিকে গ্রহের, ঘড়ির কাঁটার বা ঘূর্ণায়মান বৈদ্যুতিক পাখার গতি–এদের প্রতিটির গতিই হল পর্যাবৃত্ত গতি। এদের গতির একটি বৈশিষ্ট্য হল: প্রতিটি বস্তুই একটি নির্দিষ্ট বৃত্তাকার বা উপবৃত্তাকার পথ বারবার অতিক্রম করে এবং প্রত্যেকবার অতিক্রম করতে একটি নির্দিষ্ট সময় নেয়। এদের মধ্যে উপবৃত্তাকার পথে গ্রহগুলির গতি হল উপবৃত্তীয় বা কাক্ষিক পর্যাবৃত্ত গতি এবং অন্যান্য গতিগুলি হলো ঘূর্ণন বা চক্রাকার পর্যাবৃত্ত গতি। অন্যদিকে, একটি সরল দোলকের ববটিকে তার সাম্যাবস্থান থেকে একদিকে সামান্য টেনে ছেড়ে দিলে সেটি সাম্যাবস্থান অতিক্রম করে বিপরীত দিকে চলে যায়। তারপরে আবার সাম্যাবস্থান অতিক্রম করে যে বিন্দু থেকে ববটি ছাড়া হয়েছিল সেই বিন্দুতে ফিরে আসে। অর্থাৎ, ববটি একটি নির্দিষ্ট পথ বারবার অতিক্রম করে। দেখা যায়, এই নির্দিষ্ট পথটি অতিক্রম করতে ববটি প্রত্যেকবার একই সময় নেয়। এই দোলনের বিস্তার অল্প হলে ধরে নেওয়া যায়, ববটির গতি সরলরেখা বরাবর সম্পন্ন হয়। তাই এই গতিকে রৈখিক পর্যাবৃত্ত গতি (linear periodic motion) বলা হয়। একটি স্থিতিস্থাপক স্প্রিংয়ের গতি বা কোনো মোটর গাড়ির ইঞ্জিনের সিলিন্ডারের মধ্যে পিস্টনের গতিও রৈখিক পর্যাবৃত্ত গতি। একটি দৃঢ় আলম্ব বিন্দু থেকে ঝুলন্ত একটি স্প্রিং এর নিচে একটি ভারী বস্তুকে আটকে দিয়ে ভারটিকে নিচের দিকে টেনে ছেড়ে দিলে যদি স্প্রিং এর স্থিতিস্থাপক সীমাকে ছাড়িয়ে না যায় তবে স্প্রিংটি পর্যায়ক্রমে দুলতে থাকে। স্প্রিং এর এই দোলনও রৈখিক পর্যাবৃত্ত গতি। দুটি দৃঢ় অবলম্বনের মধ্যে একটি তারকে টানটান করে আটকে দিয়ে তারটিকে লম্বভাবে যেকোনো একদিকে সামান্য টেনে ছেড়ে দিলে সেটি সাম্যাবস্থানের দুদিকে কম্পিত হতে থাকে। তারটির ওপর অবস্থিত যেকোনো বিন্দুর কথা বিবেচনা করলে এর কম্পনও রৈখিক পর্যাবৃত্ত গতি। এ ইউনিটে আমরা বিভিন্ন প্রকার পর্যাবৃত্ত গতি ও সরল দোলন গতি ও প্রকৃতি নিয়ে আলোচনা করব। আমরা দেখব যে, সরল দোলন গতি সম্পন্ন বস্তুগুলো বিশেষ কিছু নিয়ম মেনে চলে। আর এই নিয়মে চলার কারণে তাদেরকে ব্যবহার করে দৈনন্দিন অনেক অজানাকে আমরা জানতে পারি। যেমন, কোনো স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান, পাহাড়ের উচ্চতা, খনির গভীরতা এমনকি ভূ-অভ্যন্তরে বিদ্যমান কয়লা, প্রাকৃতিক গ্যাস, প্রাকৃতিক খনিজ তেল ইত্যাদির অস্তিত্ব নির্ধারণ করতে পারি।

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ-৭.১ সরল দোলন গতি
Simple Harmonic Motion

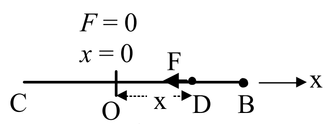
উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সরল দোলন গতি কী ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- সরল দোলন গতি সংশ্লিষ্ট রাশি সমূহ ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- সরল দোলন গতির ক্ষেত্রে বলের প্রকৃতি ও বৈশিষ্ট্য ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

৭.১.১ সরল দোলন গতির ধর্ম (Characteristics of SHM)ঃ

দোলন বা কম্পনের সহজতম রূপটিই হল সরল দোলন গতি। শুধুমাত্র সরল দোলন গতির ধর্মগুলি জানা থাকলেই যেকোনো জটিল দোলন বা কম্পনের বিশ্লেষণ করা সম্ভব হয়। কারণ দোলনের যে কোনো ঘটনাকেই দুটি বা বহুসংখ্যক সরল দোলন গতির সমষ্টি হিসেবে দেখানো যেতে পারে। এজন্যই সরল দোলন গতির আলোচনা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ।



চিত্র ৭.১

প্রত্যায়নী বল (Restoring force)ঃ কোনো কম্পনশীল বস্তুকণা যখন সাম্যাবস্থান O-তে থাকে তখন তার ওপর ক্রিয়াশীল বাহ্যিক লব্ধি বল শূন্য হয় [চিত্র ৭.১]। যেমনঃ একটি সরল দোলকের সাম্যবস্থানে ববটির নিম্নমুখী ওজন এবং ববটির ওপর সুতোর ঊর্ধ্বমুখী টান−এই দুটি বল সমান ও বিপরীতমুখী হয়, অর্থাৎ লব্ধি বল শূন্য হয়। বস্তুকণাকে তার সাম্যাবস্থান থেকে সামান্য বিচ্যুত করলেই লব্ধি বলটি আর শূন্য থাকে না, বরং এমন একটি লব্ধি বলের উদ্ভব হয় যা কণাটিকে তার সাম্যাবস্থানে ফিরিয়ে আনার চেষ্টা করে। একেই প্রত্যায়নী বল বলা হয়। যেহেতু বল একটি ভেক্টর রাশি, তাই এই প্রত্যায়নী বলের মান ও অভিমুখ দুইই আছে। এই মান ও অভিমুখ নিম্নলিখিত শর্ত দুটি পূরণ করলেই ঐ কণার গতিকে সরল দোলন গতি বলা হয়।

শর্ত দুটি হলো ঃ

১। প্রত্যায়নী বলের অভিমুখ সব সময় সাম্যাবস্থানের দিকে থাকবে।

২। প্রত্যায়নী বলের মান সাম্যাবস্থান থেকে কণার সরণের সমানুপাতিক হবে।

৭.১ নং চিত্রে রৈখিক পর্যাবৃত্ত গতিতে কম্পনশীল বস্তুকণা যে সরলরেখা বরাবর গতিশীল থাকে তার একটি দিককে X-অক্ষ ও সাম্যাবস্থান O-কে মূলবিন্দু ($x = 0$) হিসেবে ধরে নেওয়া হলো। ধরা যাক, কণাটির গতিপথের ওপর যেকোনো একটি বিন্দু D এর স্থানাঙ্ক হলো x

১ নং শর্তানুযায়ী, D বিন্দুতে কণাটির ওপর ক্রিয়াশীল প্রত্যায়নী বল F হলে, $F \propto x$

আবার ১ নং শর্তানুযায়ী, F বলটি সাম্যাবস্থান অভিমুখী হওয়ায়, x ধনাত্মক হলে (যেমনঃ OD সরণ হলো ধনাত্মক) F ঋণাত্মক হয় (যেমনঃ F ক্রিয়া করছে DO অভিমুখে)।

সুতরাং, $F \propto -x$

বা, $F = -kx$ ....(৭.১)

এখানে, k হলো একটি ধ্রুবক যাকে বল ধ্রুবক (force constant) বলা হয়। স্পষ্টত একক সরণের জন্য উৎপন্ন প্রত্যায়নী বলই হলো বল ধ্রুবক। এর একক Nm^{-1}।

বস্তুকণার ভর m এবং ত্বরণ a হলে $F = ma$ হয়। অতএব (৭.১) নং সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়,

$$ma = -kx$$

বা, $$a = -\frac{k}{m}x$$

বা, $a = -\omega^2 x$ .... (৭.২)

এখানে, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ । (৭.১) নং ও (৭.২) নং সমীকরণ দুইটির যেকোনোটিকেই সরল দোলন গতির সমীকরণ বলা হয়। এদের রূপ অভিন্ন হওয়ায় বলা যায়, সরল দোলগতির ক্ষেত্রে বস্তুকণার ত্বরণের ধর্ম ও প্রত্যায়ন বলের ধর্ম অভিন্ন। ত্বরণের এই ধর্মগুলি উল্লেখ করেই সরল দোলন গতির সংজ্ঞা নির্দেশ করা হয়।

সুতরাং, **কম্পনশীল কোনো বস্তুকণার ত্বরণ সাম্যাবস্থান থেকে কণাটির সরণের সমানুপাতিক এবং সর্বদাই সাম্যাবস্থান অভিমুখী হলে, ওই কণার গতিকে সরল দোলন গতি বলা হয়।**

অন্য ভাবে বলা যায়, যদি কোনো পর্যাবৃত্ত গতি সম্পন্ন বস্তুর ত্বরণ তার সাম্যাবস্থান থেকে সরণের সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখী অর্থাৎ সর্বদা সাম্য বিন্দু অভিমুখী হয় তবে ঐ বস্তুর গতিকে সরল দোলন গতি বলে।

লক্ষ্যণীয় যে, সরল দোলন গতিসম্পন্ন কোনো কণার ত্বরণকে $a = -\omega^2 x$ আকারে প্রকাশ করা হয়। বিপরীতক্রমে, কোনো কণার ত্বরণ যদি $a = -\omega^2 x$ সমীকরণটি মেনে চলে, তাহলেই বলা যায় যে কণাটির গতি সরল দোলন গতি।

৭.১.২ সরল দোলন গতির বৈশিষ্ট্যসমূহ (Properties of SHM)ঃ

সরল দোলন গতির কতগুলি নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্য আছে। এই বৈশিষ্ট্যসমূহ দিয়ে কোনো কণার গতি সরল দোলন গতি কিনা তা নির্ধারণ করা হয়। নিচে সরল দোলন গতির বৈশিষ্ট্যসমূহ দেয়া হলো ঃ

১। সরল দোলন গতি হলো এক ধরনের রৈখিক পর্যাবৃত্ত গতি। অর্থাৎ কোনো বস্তুকণা একই সময়ে বারবার একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাংশ বরাবর এদিক-ওদিক যাওয়া-আসা করে।

২। সরল দোলন গতি বিশিষ্ট কণার ত্বরণ সর্বদা তার সাম্যাবস্থান অভিমুখী হয়।

৩। কণাটির ত্বরণ সাম্যাবস্থান থেকে সরণের সমানুপাতিক।

৪। কণাটি যে মুহূর্তে সাম্যাবস্থান অতিক্রম করে সেই মুহূর্তে গতিবেগ সর্বোচ্চ হয়। সরণের শেষ সীমায় গতিবেগ মুহূর্তের জন্য শূন্য হয় এবং তারপরেই কণাটি বিপরীত দিকে যাত্রা শুরু করে।

৫। সরল দোলন গতির পর্যায়কাল তার বিস্তারের উপর নির্ভরশীল নয়। বিভিন্ন বাহ্যিক কারণে বিস্তার হ্রাস পেতে থাকলেও পর্যায়কাল অপরিবর্তিত থাকে।

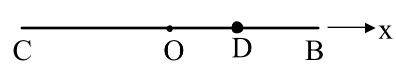
৬। সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার স্পন্দন সীমা সাম্যাবস্থান থেকে উভয় দিকে সমান দূরে অবস্থান করে।

৭। সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার সরণ সাইন বা কোসাইন অপেক্ষক দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

মনে রাখতে হবে যে, সরল দোলন গতি হলো পর্যাবৃত্ত গতির বিশেষ রূপমাত্র। পর্যাবৃত্ত গতি (ক) যদি রৈখিক হয় এবং (খ) কণার ত্বরণ যদি সাম্যাবস্থান অভিমুখী ও সাম্যাবস্থান থেকে সরণের সমানুপাতিক হয়, শুধুমাত্র তাহলেই তাকে সরল দোলন গতি বলা চলে। ঘড়ির কাঁটার গতি বা গ্রহ-উপগ্রহের গতি হল পর্যাবৃত্ত গতি, কিন্তু উপরের (ক) এবং (খ) শর্ত দুটি পূরণ না হওয়ায় এই ধরনের গতিকে সরল দোলন গতি বলা চলে না। সুতরাং বলা যায়, সব সরল দোলন গতিই পর্যাবৃত্ত গতি, কিন্তু সব পর্যাবৃত্ত গতি সরল দোলন গতি নয়।

৭.১.৩ দোলন গতি সম্বন্ধীয় কয়েকটি রাশি (Some Quantities Related to Oscillation) ঃ

১। **দোলন বা কম্পন (Oscillation or Vibration)** ঃ পর্যাবৃত্ত গতিবিশিষ্ট কোনো কণা যদি বারবার একই পথ দিয়ে আসা যাওয়া করে তবে তার গতিকে দোলন বা কম্পন বলা হয়। সুতরাং, যেকোনো দোলন বা কম্পনই পর্যাবৃত্ত গতি কিন্তু সব পর্যাবৃত্ত গতি দোলন বা কম্পন নয়।



চিত্র ৭.২(ক)

২। **পূর্ণদোলন (Complete Oscillation)** ঃ কোনো কম্পনশীল বস্তুকণার, তার গতিপথের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুতে কোনো দিকে গতিশীল থেকে আবার সেই বিন্দুতে সেই দিকে গতিশীল অবস্থায় ফিরে আসার ঘটনাটিকে পূর্ণদোলন বা পূর্ণকম্পন বলা হয়।

৭.২(ক) চিত্রে কণাটি B বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করে BOC ও COB পথ অতিক্রম করে আবার B বিন্দুতে ফিরে এলে বলা হয়, কণাটি একটি পূর্ণদোলন সম্পন্ন করেছে। লক্ষ্যণীয় যে, একটি পূর্ণদোলনে কণাটি সমগ্র রৈখিক পথটি দুবার অতিক্রম করে। সুতরাং, কণাটি যদি D বিন্দু থেকে C এর দিকে যাত্রা শুরু করে DOC, COB ও BD পথ অতিক্রম

করে আবার D বিন্দুতে ফিরে আসে তাহলেও বলা হয়, কণাটি একটি পূর্ণদোলন সম্পন্ন করেছে। পূর্ণদোলনকে পর্যায়ও (period) বলা হয়ে থাকে।

৩। **দোলনকাল (Time Period)** ঃ একটি পূর্ণদোলনের জন্য কোনো কণা যে সময় নেয় তাকে পর্যায়কাল বা দোলনকাল (T) বলা হয়। এর মাত্রা হলো সময়ের মাত্রা T এবং একক হলো সেকেন্ড (s)।

৪। **কম্পাঙ্ক (Frequency)** ঃ একক সময়ে কোনো কণা যে কয়টি পূর্ণদোলন সম্পন্ন করে তাকে কম্পাঙ্ক (f) বলা হয়।

যেহেতু T সময়ে 1 টি পূর্ণদোলন হয় তাই, একক সময়ে পূর্ণদোলনের সংখ্যা = $\frac{1}{T}$ ।

অর্থাৎ, $$f = \frac{1}{T} \qquad (৭.৩)$$

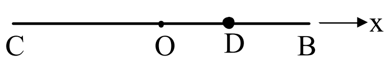
কম্পাঙ্কের মাত্রা হল T^{-1} এবং একক হার্জ (Hz) বলা হয়। $1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$

৫। **কৌণিক কম্পাঙ্ক (Angular frequency)** ঃ সরল দোলন গতি সম্পন্ন কোনো কণা একক সময়ে যে কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে কৌণিক কম্পাঙ্ক (ω) বলা হয়।

দোলনকাল এবং কম্পাঙ্ক যথাক্রমে T এবং f হলে,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad (৭.৪)$$

কৌণিক কম্পাঙ্কের একক rads^{-1} বা rad/s বা রেডিয়ান/সেকেন্ড



চিত্র ৭.২(খ)

৬। **দশা** (Phase) ঃ সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার অবস্থান, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদি সার্বিক অবস্থা বুঝাতে দশা শব্দটি ব্যবহার করা হয়। চিত্র ৭.২ এ একটি কণা COB পথে সরল দোলন গতিতে স্পন্দনরত অবস্থায় আছে। O থেকে B এর দিকে যাওয়ার সময় D অবস্থানে কণার দশা এবং পরবর্তীতে B থেকে O এর দিকে যাওয়ার সময় D অবস্থানে কণার দশা কিন্তু এক নয়। কারণ কণাটির অবস্থান একই হলেও বেগের দিক এক নয়। সুতরাং, যা দিয়ে সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার অবস্থান, বেগ ও ত্বরণ ইত্যাদি বুঝা যায় তাকে ঐ কণার দশা বলে।

৭। **কম্পন বিস্তার (Amplitude)** ঃ কোনো কম্পনশীল কণার সাম্যাবস্থান থেকে সর্বাধিক সরণের মানকে কম্পন বিস্তার (A) বা সংক্ষেপে বিস্তার বলা হয়। ৭.২ চিত্রে বিস্তার, A= OB বা OC স্পষ্টতই বিস্তারের মাত্রা হল L এবং একক m।

লক্ষ্যণীয় যে, উপরের আলোচনায় কখনও 'দোলন' আবার কখনও 'কম্পন' শব্দ দুটি ব্যবহার করা হয়েছে। বস্তুত, দোলন, কম্পন বা স্পন্দন–এই শব্দগুলি সামার্থক। তবে সাধারণত কণার পর্যায়কাল বেশি হলে (কণাটি ধীরে ধীরে দুললে), অর্থাৎ কণার কম্পাঙ্ক কম হলে কণার সেই গতিকে দোলন বলা হয়। যেমনঃ সরল দোলক বা স্থিতিস্থাপক স্প্রিং এর দোলন। অন্যদিকে, কণার পর্যায়কাল কম হলে (কণাটি দ্রুত দুললে) অর্থাৎ কণার কম্পাঙ্ক যথেষ্ট বেশি হলে কণার সেই গতিকে কম্পন বা স্পন্দন বলা হয়। যেমনঃ টানটান তার বা সুরশলাকার কম্পন।

সার-সংক্ষেপ :

- **প্রত্যায়নী বল ঃ** বস্তুকণাকে তার সাম্যাবস্থান থেকে সামান্য বিচ্যুত করলে এমন একটি লব্ধি বলের উদ্ভব হয় যা কণাটিকে তার সাম্যাবস্থানে ফিরিয়ে আনার চেষ্টা করে। একেই প্রত্যায়নী বল বলা হয়।
- প্রত্যায়নী বলের অভিমুখ সর্বদা সাম্যাবস্থানের দিকে থাকবে এবং বলের মান সাম্যাবস্থান থেকে কণার সরণের সমানুপাতিক হবে।
- **সরল দোলন গতি ঃ** কম্পনশীল কোনো বস্তুকণার ত্বরণ সাম্যাবস্থান থেকে কণাটির সরণের সমানুপাতিক এবং সর্বদাই সাম্যাবস্থান অভিমুখী হলে, ঐ কণার গতিকে সরল দোলন গতি বলা হয়।
- **দোলন বা কম্পন ঃ** পর্যাবৃত্ত গতিবিশিষ্ট কোনো কণা যদি বারবার একই পথ দিয়ে আসা যাওয়া করে তবে তার গতিকে দোলন বা কম্পন বলা হয়।

- **পূর্ণ দোলন ঃ** কোনো কম্পনশীল বস্তুকণার, তার গতিপথের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুতে কোনো দিকে গতিশীল থেকে আবার সেই বিন্দুতে সেই দিকে গতিশীল অবস্থায় ফিরে আসার ঘটনাটিকে পূর্ণদোলন বা পূর্ণকম্পন বলা হয়।
- **দোলনকাল ঃ** একটি পূর্ণদোলনের জন্য কোনো কণা যে সময় নেয় তাকে পর্যায়কাল বা দোলনকাল বলা হয়।
- **কম্পাঙ্ক ঃ** একক সময়ে কোনো কণা যে কয়টি পূর্ণদোলন সম্পন্ন করে তাকে কম্পাঙ্ক বলা হয়।
- **কৌণিক কম্পাঙ্ক ঃ** সরল দোলন গতি সম্পন্ন কোনো কণা একক সময়ে যে কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে কৌণিক দূরত্ব বলে।
- **দশা ঃ** সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার অবস্থান, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদি সার্বিক অবস্থা বুঝাতে দশা শব্দটি ব্যবহার করা হয়।
- **বিস্তার ঃ** কোনো কম্পনশীল কণার সাম্যাবস্থান থেকে সর্বাধিক সরণের মানকে বিস্তার বলা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৭.১

বহুনির্বাচনী প্রশ্নঃ

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন

১. সরল দোলন গতিবিশিষ্ট কণাটির-

i. ত্বরণ সর্বদা তার সাম্যাবস্থান অভিমুখী হয়।

ii. ত্বরণ সাম্যাবস্থান থেকে সরণের সমানুপাতিক।

iii. যে মুহূর্তে সাম্যাবস্থান অতিক্রম করে সেই মুহূর্তে গতিবেগ সর্বোচ্চ হয়।

কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

২. পর্যায় কাল ও কম্পাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক হলো-

ক. $T = f$ খ. $T = \frac{1}{f}$ গ. $f = \frac{2\pi}{T}$ ঘ. $T = \frac{2\pi}{f}$

৩। পর্যায় কাল হলো-

ক. সাম্য বিন্দু থেকে যে কোনো এক প্রান্তে যেতে যে সময় লাগে।

খ. এক স্থির বিন্দু থেকে অপর স্থির বিন্দুতে যেতে যে সময় লাগে।

গ. একটি পূর্ণ দোলন দিতে যে সময় লাগে।

ঘ. সাম্য বিন্দু থেকে এক স্থির বিন্দু পৌঁছিয়ে আবার সাম্য বিন্দুতে যেতে যে সময় লাগে।

৪. সরল দোলন গতির সাম্যাবস্থানে-

i. প্রত্যায়নী বল শূন্য হয়;

ii. বল ধ্রুবক সর্বোচ্চ হয়;

iii. গতিশক্তি সর্বোচ্চ হয়;

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

পাঠ-৭.২ সরল দোলন গতির অন্তরক সমীকরণ ও তার সমাধান
Differential Equation of SHM and its Solution

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সরল দোলন গতির অন্তরক সমীকরণ প্রতিপাদন করতে পারবেন।
- $x = A\sin(\omega t+\delta)$ যে সরল দোলন গতির অন্তরক সমীকরণের একটি সমাধান তা প্রমাণ করতে পারবেন।

৭.২.১ সরল দোলন গতির গাণিতিক বিশ্লেষণ (Mathematical Analysis of SHM) ঃ

১। সরল দোলন গতির অন্তরক সমীকরণ (Differential Equation of SHM) ঃ

যদি কোনো পর্যাবৃত্ত গতিসম্পন্ন বস্তুর ত্বরণ তার সাম্যাবস্থান থেকে সরণের সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখী অর্থাৎ সর্বদা সাম্য বিন্দু অভিমুখী হয় তবে ঐ বস্তুর গতিকে সরল দোলন গতি বলে। সুতরাং, এক্ষেত্রে কণার উপর ক্রিয়াশীল বলও সরণের সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখী হবে।

মনে করি, সরল দোলন গতিতে স্পন্দনরত একটি কণার ভর m। গতি কালের t সময়ে এর সাম্য অবস্থা থেকে সরণ x হলে কণাটির ঐ মুহূর্তের বেগ, $v = \frac{dx}{dt}$ এবং ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$ ।

সরল দোলন গতির সংজ্ঞা থেকে পাই, $F = -kx$

নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র থেকে আমরা পাই, $F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$

সুতরাং, $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ বা, $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$

$\frac{k}{m} = \omega^2$ ধরলে, $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ .... (৭.৫)

(৭.৫) নং সমীকরণটি সরল দোলন গতির অন্তরক সমীকরণ। স্পষ্টতই এটি হলো দ্বিতীয় ঘাত অন্তরক সমীকরণ।

৭.২.২ সরল দোলন গতির ব্যবকলনীয় সমীকরণের সমাধান (Solution of the Differential Equation of SHM)ঃ

সরল ছন্দিত গতির অন্তরক সমীকরণ, $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ । সমীকরণটিকে লেখা যায়,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \omega^2 x = 0$$

বা, $\frac{dv}{dt} + \omega^2 x = 0$

বা, $\frac{dx}{dt} \times \frac{dv}{dx} = -\omega^2 x$

বা, $vdv = -\omega^2 xdx$

সমীকরণটি যোগজীকরণ করলে, $\int vdv = -\omega^2 \int xdx$

বা, $\frac{v^2}{2} = -\omega^2\frac{x^2}{2} + c$ এখানে c একটি যোগজীকরণ ধ্রুবক।

যখন, $v=0$ তখন, $x=A$, অর্থাৎ, $x=$ বিস্তার, এই শর্ত সাপেক্ষে,

$$0=-\omega^2\frac{A^2}{2}+c \qquad \text{বা, } c=\omega^2\frac{A^2}{2}$$

অতএব, $\frac{v^2}{2}=-\omega^2\frac{x^2}{2}+\omega^2\frac{A^2}{2}$

বা, $v^2=\omega^2\left(A^2-x^2\right)$

বা, $v=\omega\ \sqrt{A^2-x^2}$

বা, $\frac{dx}{dt}=\omega\sqrt{A^2-x^2}$

বা, $\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}=\omega dt$

পুনরায় যোগজীকরণ করে পাই,

বা, $\int\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}=\omega\int dt$

বা, $\sin^{-1}\frac{x}{A}=\omega t+\delta$ এখানে $\delta=$ যোগজীকরণ ধ্রুবক।

বা, $x=A\sin(\omega t+\delta)$ ....(৭.৬)

যখন, $t=0$ তখন, $x=A\sin\delta$

এখানে δ হলো বস্তুকণার আদি দশা বা প্রারম্ভিক দশা । যদি আদি দশা বা প্রারম্ভিক দশা $\delta=0$ হয় তবে, যখন $t=0$ তখন $x=0$ হবে অর্থাৎ সময়ের গণনার যে মুহূর্তে শুরু করা হয়, তখন কণাটি তার গতিপথের সাম্য অবস্থানে থাকে। (৭.৬) নং সমীকরণ হলো সরল দোলন গতির অন্তরক সমীকরণের সমাধান। এটাই হলো সরল দোলন গতির সরণ-নির্দেশক সাধারণ সমীকরণ।

গাণিতিক উদাহরণ ৭.১ : যে সরল দোলন গতির বিস্তার 4 cm, প্রারম্ভিক দশা 12° এবং 1 min-এ 120 বার কম্পন হয় সেই সরল দোলন গতির সমীকরণ লিখুন।

দেয়া আছে,
বিস্ড়্র, $A=4$ cm
আদি দশা, $\delta=12^\circ$
কম্পাঙ্ক , $f=\frac{120}{60}=2$ Hz

সমাধান : আমরা জানি, $\omega=2\pi f$

অতএব, $\omega=2\pi\times2=4\pi\,\text{rads}^{-1}$ এবং $\delta=12\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{15}$

আবার, $x=A\sin(\omega t+\delta)$

মান বসালে, $x=4\sin\left(4\pi t+\frac{\pi}{15}\right)$

উত্তর: $x=4\sin\left(4\pi t+\frac{\pi}{15}\right)$

সার-সংক্ষেপ :

- $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ হলো সরল দোলন গতির অন্তরক সমীকরণ।
- $v=\omega^2\sqrt{A^2-x^2}$ হলো সরল দোলন গতি সম্পন্ন কোনো কণার বেগের সমীকরণ।
- $x=A\sin(\omega t+\delta)$ হলো সরল দোলন গতির ব্যবকলনীয় সমীকরণের সমাধান।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৭.২

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন

১. একটি কণার সরল দোলন গতির সমীকরণ, $x = 4\sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{15}\right)$ হলে এর দশা হবে-

ক. $4\pi t + \frac{\pi}{15}$ খ. $-\frac{\pi}{15}$

গ. $4\pi t$ ঘ. 4

২. একটি কণার সরল দোলন গতির সমীকরণ, $x = 10\sin\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right)$ হলে এর আদি দশা হবে-

ক. $\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}$ খ. $\frac{\pi}{12}$

গ. $-\frac{\pi}{12}$ ঘ. 10

৩. একটি সরল দোলন গতি $x_1 = 5\sin \omega t$ এর সাপেক্ষে অন্য একটি সরল দোলন গতি $x_2 = -10\sin \omega t$ এর দশা পার্থক্য কত?

ক. $\frac{\pi}{2}$ খ. π

গ. $-\pi$ ঘ. 0

পাঠ-৭.৩ সরল দোলন গতির ক্ষেত্রে বিভিন্ন রাশি এবং বৃত্তাকার গতির সাথে সরল দোলন গতির সম্পর্ক

Relation between SHM and Circular Motion

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- $x = A\sin(\omega t+\delta)$ সমীকরণটির বিভিন্ন রাশি ব্যাখ্যা করতে পারবেন এবং তাদের মধ্যকার সম্পর্ক স্থাপন করতে পারবেন।
- সরল দোলন গতি ও বৃত্তাকার গতির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে পারবেন।

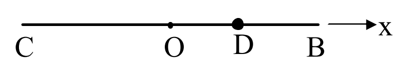
৭.৩.১ সরল দোলন গতি সম্বন্ধীয় কয়েকটি রাশি (Some Quantities Related to SHM) ঃ

সরণ (Displacement) ঃ

(৭.৬) নং সমীকরণ থেকে আমরা জানি, সরল দোলন গতি সম্পন্ন কোনো কণার সরণ নির্দেশক সাধারণ সমীকরণটি হল,

$$x = A\sin(\omega t+\delta) \quad \text{.....................} \quad (৭.৭)$$

বিশেষ ক্ষেত্র ঃ



চিত্র নং-৭.৩

(ক) কণাটি তার গতিপথের প্রান্তবিন্দু [চিত্র ৭.৩] এর B বা C বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করলে,

$$x = A\cos\omega t \quad \text{.....................} \quad (৭.৮)$$

(খ) কণাটি সাম্যাবস্থান [চিত্র নং ৭.৩ -এর O বিন্দু] থেকে যাত্রা শুরু করলে,

$$x = A\sin\omega t \quad \text{.....................} \quad (৭.৯)$$

বেগ (Velocity)ঃ

সরল দোলন গতির সরণ নির্দেশক সাধারণ সমীকরণ, $x = A\sin(\omega t+\delta)$

এখানে, x = t সময়ে কণার সরণ, A = কণার বিস্তার, ω = কৌণিক বেগ এবং δ = আদি দশা বা প্রারম্ভিক দশা।

সুতরাং, সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণাটির বেগ,

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}A\sin(\omega t+\delta)$$

বা, $$v = A\omega\cos(\omega t+\delta) \quad \text{.....................} \quad (৭.১০)$$

বা, $$v = A\omega\sqrt{1-\sin^2(\omega t+\delta)} \qquad \text{যেহেতু, } \cos(\omega t+\delta) = \sqrt{1-\sin(\omega t+\delta)}$$

বা, $$v = \omega\sqrt{A^2 - A^2\sin^2(\omega t+\delta)}$$

সুতরাং, $$v = \omega\sqrt{A^2-x^2} \quad \text{.....................} \quad (৭.১১)$$

এই সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে, কণার বেগের মান সরণের মানের ওপর নির্ভর করে।

বিশেষ ক্ষেত্র ঃ

১। যখন $x = 0$, অর্থাৎ কণাটি যখন সাম্যাবস্থানে আসে, তখন, $v = A\omega$। এটিই বেগের সর্বোচ্চ মান।
অর্থাৎ $v_{max} = A\omega$

২। যখন $x = A$, অর্থাৎ কণাটি যখন প্রান্তবিন্দুতে আসে, তখন, $v = \omega\sqrt{A^2-(A)^2} = 0$ এটিই বেগের সর্বনিম্ন মান। অর্থাৎ $v_{min} = 0$

সুতরাং, সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার বেগ তার গতিপথের বিভিন্ন অবস্থানে বিভিন্ন হয়। সাম্যাবস্থানে বেগের মান সর্বোচ্চ হয় এবং সাম্যাবস্থান থেকে প্রান্তবিন্দুর দিকে যাওয়ার সময়ে বেগের মান ক্রমশ কমতে থাকে এবং প্রান্তবিন্দুতে কণাটি মুহূর্তের জন্য স্থির হয়, অর্থাৎ বেগ শূন্য হয়।

ত্বরণ(Acceleration)ঃ

(৭.১০) নং সমীকরণ থেকে পাই সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণাটির গতিবেগ,

$$v = A\omega\cos(\omega t+\delta)$$

সুতরাং, ত্বরণ, $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}A\omega\ \cos\ (\omega t+\delta)$

বা, $a=-A\omega^2\sin(\omega t+\delta)$

বা, $a=-\omega^2 x$ ....(৭.১২)

এই সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে, কণার ত্বরণের মান সরণের মানে উপর নির্ভর করে।

বিশেষ ক্ষেত্র ঃ

(১) যখন $x = 0$, অর্থাৎ কণাটি যখন সাম্যাবস্থানে আসে, তখন $a = 0$। এটিই ত্বরণের সর্বনিম্ন মান।

(২) যখন $x=A$, অর্থাৎ কণাটি যখন প্রান্তবিন্দুতে আসে, তখন $a=-\omega^2 A$। এটিই ত্বরণের সর্বোচ্চ মান। বিপরীত চিহ্ন বোঝায় যে, ত্বরণ ও সরণ বিপরীতমুখী।

সুতরাং, সরল দোলনগতি সম্পন্ন কণার ত্বরণ তার গতিপথের বিভিন্ন অবস্থানে বিভিন্ন হয়। সাম্যাবস্থানে ত্বরণের মান সর্বনিম্ন (শূন্য) হয় এবং প্রান্তবিন্দু দুটিতে ত্বরণ সর্বোচ্চ হয়।

প্রসঙ্গত উল্লেখযোগ্য, (৭.৭) নং সমীকরণের পরিবর্তে (৭.৮) নং বা (৭.৯) নং সমীকরণ ব্যবহার করলেও বেগ ও ত্বরণ নির্দেশক (৭.১১) নং ও (৭.১২) নং সমীকরণ দুটি একই হয়।

পর্যায়কাল ও কম্পাঙ্ক (Time period and frequency) ঃ

ধরা যাক, সরল দোলন গতির সরণ নির্দেশক সমীকরণ $x=A\sin(\omega t+\delta)$।

এখানে, x = t সময়ে কণার সরণ, A = কণার বিস্তার, ω = কৌণিক বেগ এবং δ = আদি দশা বা প্রারম্ভিক দশা।

মনে করি, সময়কে $\frac{2\pi}{\omega}$ এর n (যখন $n = 0, 1, 2, 3$ ....) গুণিতক পরিমাণ বৃদ্ধি করা হলো। তাহলে সরল দোলন গতির সরণ নির্দেশক সমীকরণকে লেখা যায়, $x=A\sin\left[\omega\left(n\frac{2\pi}{\omega}+t\right)+\delta\right]$

বা, $x=A\sin[2\pi n+(\omega t+\delta)]$

বা, $x=A\sin\ (\omega t+\delta)$ [যেহেতু $\sin(2\pi+\theta)=\sin\theta$]

এখান থেকে দেখা যায় যে, $\frac{2\pi}{\omega}$ সময় পরপর দোলন গতি সম্পন্ন কণার সরণ ও গতির পুনরাবৃত্তি ঘটে।

সুতরাং দোলন গতির পর্যায় কাল, $T=\frac{2\pi}{\omega}$ .. ..(৭.১৩)

আবার, আমরা জানি, $\omega^2=\frac{k}{m}$ বা, $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

(৭.১৩) নং সমীকরণে ω এর মান বসালে, $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ... ...(৭.১৪)

(৭.১৩) নং ও (৭.১৪) নং সমীকরণ দুটি সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার পর্যায়কালে ভিন্ন রূপ।

একক সময়ে যতটি পূর্ণ দোলন (পূর্ণ পর্যায়) সম্পন্ন হয়, তাকে সরল দোলন গতির কম্পাঙ্ক f বলা হয়।

সুতরাং, কম্পাংক, $f = \frac{1}{T}$ ... ...(৭.১৫)

(৭.১৩) নং সমীকরণ থেকে T এর মান বসালে,

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{.... ... ...(৭.১৬)}$$

আবার, (৭.১৫) নং সমীকরণে (৭.১৬) নং সমীকরণের মান বসালে,

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{.... ... ...(৭.১৭)}$$

(৭.১৬) নং ও (৭.১৭) নং সমীকরণ দুটি সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার কম্পাঙ্কের ভিন্ন রূপ।

বিস্তার (Amplitude) ঃ

কোনো একটি কম্পমান বস্তু তার সাম্যাবস্থান হতে যেকোনো এক দিকে সর্বাধিক যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে ঐ কম্পমান বস্তুর বিস্তার বলে।

৭.৩ নং চিত্রে সরল দোলন গতির বিস্তার = OB = OC। যেহেতু যেকোনো কোসাইন বা সাইন অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান হলো $|\pm 1|$, তাই দোলন গতির সরণ নির্দেশক সমীকরণ $x = A\sin(\omega t + \delta)$ থেকে পাওয়া যায়,

সরণ x এর সর্বোচ্চ মান = বিস্তার = $A \times |\pm 1| = |\pm A| = A$ । সুতরাং, $\overrightarrow{OB} = \vec{A}$ এবং $\overrightarrow{OC} = -\vec{A}$

অর্থাৎ সরল দোলগতিতে সাম্যাবস্থানের দুই দিকেই বিস্তার সমান হয়। (৭.১৩), (৭.১৪), (৭.১৬) এবং (৭.১৭) নং সমীকরণগুলি থেকে এটাও বোঝা যায় যে, সরল দোলন গতির পর্যায়কাল ও কম্পাঙ্ক কোনোভাবেই বিস্তার A-এর উপর নির্ভরশীল নয়। তাই কোনো সরল দোলকের বিস্তার বাতাসের বাধার জন্য ধীরে ধীরে কমতে থাকলেও পর্যায়কাল অপরিবর্তিতই থেকে যায়। এজন্য সরল দোলন গতিকে সমকাল গতি (Isochronous Motion) বলা হয়।

দশা (Phase) ঃ

সরল দোলন গতি বিশিষ্ট কণার যেকোনো মুহূর্তের গতির অবস্থাকে দশা বলা হয়। গতির অবস্থা বলতে সেই মুহূর্তে কণাটির সরণ, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদি বোঝায়।

সরণ-নির্দেশক সমীকরণ, $x = A\sin(\omega t + \delta)$

ধরা যাক, $\theta = \omega t + \delta$ ... ... (৭.১৮)

সুতরাং, সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়,

সরণ, $x = A\sin\theta$

বেগ, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = \omega\cos\theta$

ত্বরণ, $a = -\omega^2 x = -\omega^2 A\sin\theta$

যেহেতু ω এবং A উভয়েই ধ্রুবক, তাই যে কোনো মুহূর্তে কণাটির সরণ, বেগ ও ত্বরণ সম্পূর্ণ ভাবেই θ কোণটির ওপর নির্ভর করে। (৭.১৮) নং সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত এই θ কোণকেই সরল দোলন গতির দশা কোণ (phase angle) বলা হয়। সেই সমীকরণ থেকে দেখা যায়, দশা কোণ θ সময় t- এর ওপর নির্ভরশীল। ফলে সময়ের সাপেক্ষে সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার দশা ক্রমাগত পরিবর্তিত হতে থাকে।

বিশেষ ক্ষেত্র ঃ

১। $\theta = 0^\circ$ হলে, $x = A\sin 0^\circ = 0$; অর্থাৎ কণাটির অবস্থান হল O বিন্দুতে [চিত্র নং-৭.৩]। θ-র মান বৃদ্ধি পেয়ে 90° হলে, $x = A\sin 90^\circ = A$; অর্থাৎ কণাটির অবস্থান হল B-বিন্দুতে। সুতরাং কণাটি O থেকে B বিন্দুতে গেলে দশার পরিবর্তন = $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ ।

২। $\theta = 270^\circ$ হলে, $x = A\sin 270^\circ = -A$; অর্থাৎ কণাটির অবস্থান হল C-বিন্দুতে। সুতরাং, কণাটি B থেকে C -তে গেলে দশার পরিবর্তন $= 270^\circ - 90^\circ = 180^\circ = \pi$। এক্ষেত্রে B ও C অবস্থান দুটি হল বিপরীত দশাসম্পন্ন।

৩। $\theta = 450° = 360° + 90°$ হলে, $x = A\sin 450° = A\sin 90° = A$; অর্থাৎ কণাটির অবস্থান হল B বিন্দুতে। সুতরাং কণাটি B থেকে যাত্রা শুরু করে C বিন্দু পর্যন্ত গিয়ে আবার B বিন্দুতে ফিরে এলে দশার পরিবর্তন = $450° - 90° = 360° = \pi$। এক্ষেত্রে প্রাথমিক ও অন্তিম অবস্থান দুটি হল সমদশাসম্পন্ন।

আদি দশা বা প্রারম্ভিক দশা (Epoch) ঃ

সরল দোলগতিসম্পন্ন কণার যাত্রার শুরুতে (অর্থাৎ $t = 0$ সময়ে) যে দশা থাকে, তাকে আদি দশা, প্রারম্ভিক দশা বা দশা ধ্রুবক (phase constant) বলা হয়।

যেমন, সরল দোলন গতির সরণ-নির্দেশক সমীকরণ, $x = A\sin(\omega t + \delta)$ হলে, দশা কোণ, $\theta = \omega t + \delta$। এই সমীকরণে $t = 0$ বসিয়ে পাওয়া যায়, θ (আদি দশা) = δ।

বিশেষ ক্ষেত্র হিসেবে, কণাটি গতির প্রান্তবিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করলে (৭.৬) নং সমীকরণ থেকে আমরা জানি,

$$x = A\cos\omega t = A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right);$$

এখানে দশা কোণ $\theta = \omega t + \frac{\pi}{2}$। এখন $t = 0$ বসালে পাওয়া যায়, ইপক, $\delta = \frac{\pi}{2}$

আবার, কণাটি সাম্যাবস্থান থেকে যাত্রা শুরু করলে (৭.৯) নং সমীকরণ থেকে আমরা জানি, $x = A\sin\omega t$ এখানে দশা কোণ $\theta = \omega t$ বসালে পাওয়া যায়, আদি দশা, $\delta = 0$।

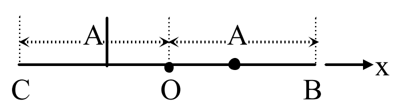
দশা পার্থক্য (Phase difference) ঃ

সরল দোলন গতিবিশিষ্ট দুটি বস্তুকণার ক্ষেত্রে, যেকোনো নির্দিষ্ট মুহূর্তে যদি প্রথম কণাটির দশা কোণ θ_1 এবং দ্বিতীয় কণাটির দশা কোণ θ_2 হয়, তাহলে কণা দুটির দশা পার্থক্য $\phi = \theta_2 - \theta_1$। দুটি সরল দোলন গতির পর্যায়কাল, কম্পাঙ্ক ও বিস্তার সম্পূর্ণ অভিন্ন হলেও তাদের দশা পৃথক হতে পারে। যেমন (৭.৩) নং চিত্রে প্রথম কণাটি যে মুহূর্তে C বিন্দুতে পৌঁছোয়, যদি সেই মুহূর্তেই দ্বিতীয় কণাটির অবস্থান হয় B বিন্দু, তাহলে দশা পার্থক্য,

$$\phi = \theta_2 - \theta_1 = 270° - 90° = 180° = \pi$$

সরণ,বেগ ও ত্বরণের সম্পর্কে (Relation among Displcement, Velocity and Acceleration)ঃ

ধরা যাক, চিত্র ৭.৪ অনুসারে সরল দোলন গতি বিশিষ্ট একটি কণা প্রান্তবিন্দু B থেকে যাত্রা শুরু করে। পর্যায়কাল T হলে কণাটি $\frac{T}{4}$ সময়ে সাম্যাবস্থান O -কে অতিক্রম করে, $\frac{T}{2}$ সময়ে প্রান্তবিন্দু C -তে পৌঁছায়, $\frac{3T}{4}$ সময়ে আবার সাম্যাবস্থান O -কে অতিক্রম করে এবং T সময়ে আবার B বিন্দুতে ফিরে আসে। $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$ এবং $a = -\omega^2 x$ সমীকরণ দুটি ব্যবহার করে বিভিন্ন সময়ে সরণ, বেগ ও ত্বরণকে নিম্নলিখিত সারণির মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়।

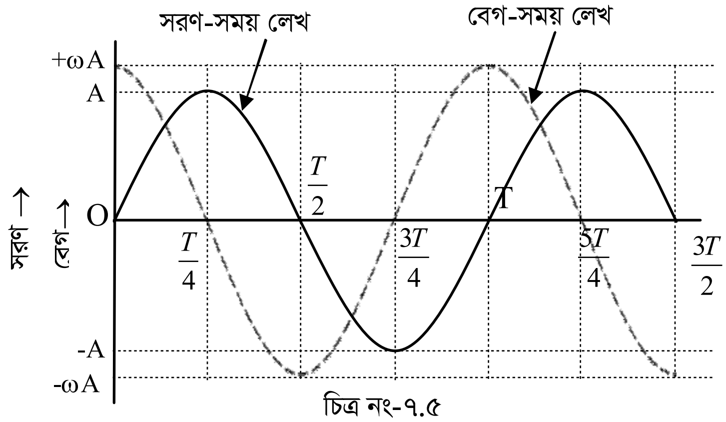


চিত্র নং-৭.৪

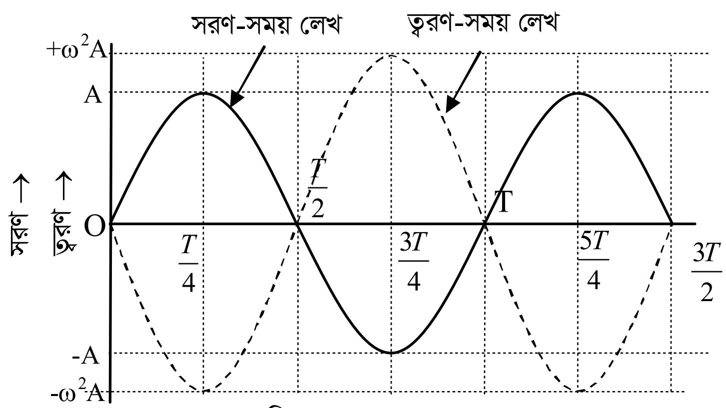
সারণি ৭.১ঃ সরণ, বেগ ও ত্বরণ

সময় (t)	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
সরণ (x)	$+A$	0	$-A$	0	$+A$
বেগ (v)	0	$-\omega A$	0	$+\omega A$	0
ত্বরণ (a)	$-\omega^2 A$	0	$+\omega^2 A$	0	$-\omega^2 A$

সময়ের সঙ্গে সরণ ও বেগের লেখচিত্র ৭.৫ নং চিত্রে এবং সরণ ও ত্বরণের লেখচিত্র ৭.৬ নং চিত্রে দেখানো হল।



চিত্র নং-৭.৫



চিত্র নং-৭.৬

সরণের সঙ্গে বেগ ও ত্বরণের দশা পার্থক্য ঃ

সরণ দোলন গতিতে,

সরণ, $x = A\sin\omega t$

বেগ, $v = \dfrac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t = A\omega\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

ত্বরণ, $a = \dfrac{dv}{dx} = -\omega^2 A\sin\omega t = \omega^2 A\sin(\omega t + \pi)$

সুতরাং, বেগ ও সরণের দশার পার্থক্য $\dfrac{\pi}{2} = 90^\circ$ এবং ত্বরণ ও সরণের দশার পার্থক্য $\pi = 180^\circ$

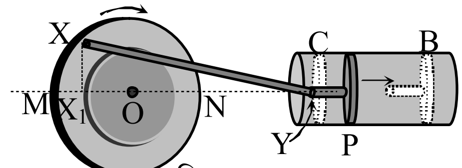
৭.৩.২ সরল দোলন গতি ও সমবৃত্তীয় গতির সম্পর্ক (Relation between SHM and Uniform Circular Motion)

সরল দোলন গতি ও সমবৃত্তীয় গতির সম্পর্ক (Relation between SHM and Uniform Circular Motion) চিত্রের মাধ্যমে প্রমাণ ঃ

রৈখিক পর্যাবৃত্ত গতির সহজতম রূপ হলো সরল দোলন গতি। আবার, চক্রাকার পর্যাবৃত্ত গতির সহজতম রূপ হল সমবৃত্তীয় গতি। সমবৃত্তীয় গতি ও সরল দোলগতির মধ্যে একটি সম্পর্ক আছে যা একটি যান্ত্রিক দৃষ্টান্তের মাধ্যমে দেখানো যেতে পারে।

মনে করি, O বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটি চাকা সমদ্রুতিতে আবর্তন করছে (চিত্র ৭.৭)। XY একটি অক্ষ দন্ড। X প্রান্ত চাকার পরিধিতে এবং Y প্রান্ত একটি চোঙের মধ্যস্থিত পিস্টন P-এর হাতলের সঙ্গে যুক্ত। চাকাটি ঘূর্ণনের সাথে সাথে

পিস্টনটি চোঙের মধ্যে চলাচল করবে। মনে করা যাক, কোনো এক সময় X বিন্দুটি M বিন্দুতে অবস্থিত। ফলে চাকাটির M থেকে N পর্যন্ত গতির জন্য P পিস্টনটি চোঙের মধ্যে C থেকে B অবস্থানে পৌঁছায়। আবার, চাকাটির N থেকে M পর্যন্ত গতির জন্য P পিস্টনটি চোঙের মধ্যে B থেকে C অবস্থানে ফিরে আসে। তাই চাকাটি বারবার ঘুরতে থাকলে পিস্টনটিও CB ও BC পথে বারবার যাতায়াত করে। লক্ষ্য করুন, চাকাটি বারবার ঘুরতে থাকলে X বিন্দুর প্রক্ষেপ X_1 বিন্দুও MN ও NM পথে বারবার যাতায়াত করে। চাকাটির গতি যদি সমবৃত্তীয় গতি হয় তাহলে পিস্টনটির গতি বা X_1 এর গতি হবে সরল দোলন গতি। প্রকৃতপক্ষে বৃত্তপথের যেকোনো ব্যাসের ওপর সমবৃত্তীয় গতির অভিক্ষেপই হল সরল দোলন গতিবিশিষ্ট।

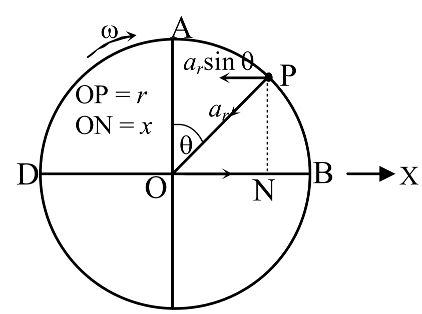


চিত্র -৭.৭

জ্যামিতিক প্রমাণ ঃ

মনে করি, একটি বস্তুকণা O কেন্দ্র এবং r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তাকার পথে ω সমকৌণিক বেগে ABCD বরাবর তীরচিহ্নিত দিকে ক্রমাগত ঘুরছে [চিত্র ৭.৮]। প্রমাণ করতে হবে, বস্তুকণার অবস্থান থেকে DOB ব্যাসের ওপর লম্ব টানলে লম্বের পাদবিন্দু ওই ব্যাস বরাবর সরল দোলন গতিতে চলাচল করবে। এর প্রমাণ নিচে দেওয়া হল।

বস্তুকণা বৃত্তের পরিধি বরাবর ω সমকৌণিক বেগে ঘুরছে বলে DOB ব্যাসের ওপর P বিন্দু থেকে অংকিত লম্বের পাদবিন্দু N এর অবস্থান ক্রমাগত বদলাবে। বস্তুকণা যে সময়ে A বিন্দু থেকে ঘড়ির কাঁটার দিকে যাত্রা শুরু করে B, C, D বিন্দুগুলি হয়ে পুনরায় A বিন্দুতে ফিরে আসে, সেই সময়ে লম্বের পাদবিন্দু N বিন্দুটি O বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করে যথাক্রমে B, O, D বিন্দুগুলি হয়ে পুনরায় O বিন্দুতে ফিরে আসে। যেহেতু বস্তুকণা সমকৌণিক বেগে ঘুরছে তাই বৃত্তপথে একবার পূর্ণ আবর্তন করতে বস্তুকণাটির একটি নির্দিষ্ট সময় লাগে। তেমনই লম্বের পাদবিন্দুটি O বিন্দু থেকে B, O, D বিন্দুগুলি হয়ে পুনরায় O বিন্দুতে ফিরে আসতে সেই একই নির্দিষ্ট সময় নেয়। অর্থাৎ পাদবিন্দুটির পর্যায়কাল নির্দিষ্ট। সুতরাং, N বিন্দুর গতি হল রৈখিক পর্যাবৃত্ত গতি। অনুরূপভাবে, P বিন্দু থেকে AOC ব্যাসের ওপর লম্ব টানলে সেই লম্বের পাদবিন্দুও AOC ব্যাস বরাবর রৈখিক পর্যাবৃত্ত গতি সম্পন্ন করবে।



চিত্র ৭.৮

যেহেতু কণাটি ω সমকৌণিক বেগে ঘুরছে এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ r অতএব কণাটির দ্রুতি, $v = \omega r$

P বিন্দুতে কণটির PO বরাবর কেন্দ্রমুখী ত্বরণ, $a_r = \dfrac{v^2}{r} = \omega^2 r$ [যেহেতু $v = \omega r$]

মনে করি, কোনো এক সময় OP ব্যসার্ধটি Y-অক্ষের সাথে θ কোণে অবস্থান করছে এবং P বিন্দুর পাদবিন্দু N এর সরণ x

তাহলে, $ON = x = OP\sin\theta = r\sin\theta$

আবার, DOB ব্যাস বরাবর অভিকেন্দ্র ত্বরণ a_r এর উপাংশের মান, অর্থাৎ ওই মুহূর্তে N বিন্দুর ত্বরণ হলো,

$a = -a_r \sin\theta = -\omega^2 r \sin\theta = -\omega^2 x$ [এখানে, চিত্রানুসারে ত্বরণ হলো সরণের বিপরীত অভিমুখী]

সুতরাং, N বিন্দুর ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক ও বিপরীত অভিমুখী ।

a_r এর শুধুমাত্র DOB ব্যাস বরাবর উপাংশটি N বিন্দুর গতির সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত। স্পষ্টতই, কণাটি P বিন্দুতে থাকলে N বিন্দুর ওপর ক্রিয়াশীল ওই উপাংশটি সবসময়ই O বিন্দু অভিমুখী অর্থাৎ সাম্যাবস্থান অভিমুখী হবে। সুতরাং, N বিন্দুর গতি হল সরল দোলন গতি।

অতএব কোনো কণা বৃত্তপথে সমকৌণিক বেগে ঘুরতে থাকলে ওই বৃত্তের যেকোনো ব্যাসের ওপর উক্ত কণার অবস্থান থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর গতিকে সরল দোলন গতি বলা হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৭.২ : একটি সরল দোলন গতির সমীকরণ $x = 10\sin\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right)$ **। সকল রাশি SI পদ্ধতিতে পরিমাপ করা হয়েছে। এই দোলন গতির (i) বিস্তার, (ii) পর্যায়কাল, (iii) সর্বোচ্চ বেগ, (iv) সর্বোচ্চ ত্বরণ, (v) প্রারম্ভিক দশা এবং (vi) যাত্রা আরম্ভের 1s পরে বেগ নির্ণয় করুন।**

দেয়া আছে,
সরল দোলন গতির সমীকরণ,
$x = 10\sin\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right)$

সমাধান : আমরা জানি, $x = A\sin(\omega t + \delta)$

প্রদত্ত $x = 10\sin\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right)$ সমীকরণকে উল্লেখিত সমীকরণের সাথে তুলনা করলে,

(i) বিস্তার, $A = 10$ m

(ii) $\omega = \frac{\pi}{3}$ । সুতরাং পর্যায়কাল, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \times \frac{3}{\pi} = 6$ s

(iii) সর্বোচ্চ বেগ, $v = \omega A = \frac{\pi}{3} \times 10 = \frac{3.14}{3} \times 10 = 10.47$ ms^{-2}

(iv) সর্বোচ্চ ত্বরণ, $a = \omega^2 A = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \times 10 = \left(\frac{3.14}{3}\right)^2 \times 10 = 10.97$ ms^{-2}

(v) প্রারম্ভিক দশা, $\delta = -\frac{\pi}{12} = -15^\circ$

(vi) যাত্রা আরম্ভের 1s পরে সরণের জন্য প্রদত্ত সমীকরণে $t = 1$ বসিয়ে পাই,

$$x = 10\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) = 10\sin\left(60^\circ - 15^\circ\right) = 10\sin 45^\circ = 10 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \text{ m}$$

আমরা জানি, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

সুতরাং. $v = \frac{\pi}{3}\sqrt{10^2 - \left(5\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\pi}{3} \times \sqrt{50} = \frac{3.14}{3} \times \sqrt{50} = 7.4$ ms^{-1}

উত্তর: বিস্তার, $A = 10$ m; পর্যায়কাল, $T = 6$ s; সর্বোচ্চ বেগ, $v = 10.47$ ms^{-1}; সর্বোচ্চ ত্বরণ, $a = 10.97$ ms^{-2}; প্রারম্ভিক দশা, $\delta = -15^\circ$; যাত্রা আরম্ভের 1s পরে বেগ, $v = 7.4$ ms^{-1}

গাণিতিক উদাহরণ ৭.৩ : সরল দোলন গতিসম্পন্ন একটি কণার দোলনকাল 2 s এবং বিস্তার 5 cm । কণাটির (i) সর্বোচ্চ বেগ, (ii) সর্বোচ্চ ত্বরণ এবং (iii) সাম্যাবস্থান থেকে 4cm দূরত্বে বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় করুন।

দেয়া আছে,
বিস্ড়্র, $A = 5$ cm
দোলন কাল, $T = 2$ s

সমাধান : আমরা জানি, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.14}{2} = 3.14$

(i) সর্বোচ্চ বেগ, $v = \omega A = 3.14 \times 5 = 15.7$ cms^{-1}

(ii) সর্বোচ্চ ত্বরণ, $a = \omega^2 A = 3.14^2 \times 5 = 49.3$ cms^{-2}

(iii) যখন $x = 4$ cm $= 4 \times 10^{-2}$ m

তখন বেগ, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

বা, $v = 3.14\sqrt{5^2 - 4^2} = 3.14\sqrt{25 - 16}$

বা, $v = 3.14 \times 3 = 9.42$ cms^{-1}

ত্বরণ, $a = \omega^2 x = 3.14^2 \times 4 = 39.44$ cms^{-2}

উত্তর: i) 15.7 cms^{-1}; ii) 49.3 cms^{-2}; iii) 9.42 cms^{-1} ও 39.44 cms^{-2}

গাণিতিক উদাহরণ ৭.৪ : সরল দোলন গতিসম্পন্ন একটি কণা যখন সাম্যাবস্থান থেকে 6 cm ও 8 cm দূরত্বে থাকে তখন তার বেগ যথাক্রমে 20 cm/s ও 15 cm/s । কণাটির বিস্তার ও পর্যায়কাল নির্ণয় করুন।

দেয়া আছে,
প্রথম সরণ, $x_1 = 6$ cm
দ্বিতীয় সরণ, $x_2 = 8$ cm
x_1 অবস্থানে বেগ, $v_1 = 20$ cms^{-1}
x_2 অবস্থানে বেগ, $v_2 = 15$ cms^{-1}

সমাধান : আমরা জানি, বেগ, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

তাহলে, $v_1 = \omega\sqrt{A^2 - {x_1}^2}$

বা, $20 = \omega\sqrt{A^2 - 6^2}$ ...... (i)

এবং $v_2 = \omega\sqrt{A^2 - {x_2}^2}$

বা, $15 = \omega\sqrt{A^2 - 8^2}$ ....(ii)

অতএব, $\frac{20}{15} = \frac{\omega\sqrt{A^2 - 6^2}}{\omega\sqrt{A^2 - 8^2}}$

বা, $\frac{4}{3} = \frac{\omega\sqrt{A^2 - 36}}{\omega\sqrt{A^2 - 64}}$

বা, $\frac{4^2}{3^2} = \frac{A^2 - 36}{A^2 - 64}$

বা, $\frac{16}{9} = \frac{A^2 - 36}{A^2 - 64}$

বা, $16A^2 - 1024 = 9A^2 - 324$

বা, $7A^2 = 700$

বা, $A^2 = 100$ বা, $A = 10$ cm

(i) নং সমীকরণে মান বসালে,

$20 = \omega\sqrt{100 - 36} = 8\omega$

বা, $\omega = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$ বা, $\frac{2\pi}{T} = \frac{5}{2}$

বা, $T = \frac{4\pi}{5} = \frac{4 \times 3.14}{5} = 2.51$s

উত্তর: সুতরাং কণাটির বিস্তার 10 cm এবং পর্যায় কাল 2.51s ।

গাণিতিক উদাহরণ ৭.৫ : সরল দোলন গতি সম্পন্ন একটি কণার দোলনকাল ও বিস্তার যথাক্রমে 10 s ও 12 cm । কণাটি সাম্যাবস্থান থেকে 4cm দূরে গেলে তার বেগ কত হবে বের করুন।

দেয়া আছে,
দোলনকাল, $T = 10$ s
বিস্ড্রর, $A = 12$ cm
সরণ, $x = 4$ cm

সমাধান : আমরা জানি, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

অতএব, $\omega = \frac{2 \times 3.14}{10} = 0.628$ rads^{-1}

আবার, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

বা, $v = 0.628\sqrt{12^2 - 4^2} = 0.628\sqrt{128}$

বা, $v = 7.1$ cms^{-1} $= 7.1 \times 10^{-2}$ ms^{-1}

উত্তর: 7.1×10^{-2} ms^{-1}

গাণিতিক উদাহরণ ৭.৬ : সরল দোলন গতিতে থাকা একটি কণার গতির সমীকরণ $x = 5\sin\left(4t + \frac{\pi}{6}\right)$ **। সরণ 3 cm হলে বেগ কত হবে বের করুন?**

সমাধান : আমরা জানি, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

দেয়া আছে,
$x = 5\sin\left(4t + \frac{\pi}{6}\right)$
$x = 3$ cm

প্রদত্ত সমীকরণ, $x = 5\sin\left(4t + \frac{\pi}{6}\right)$কে $x = A\sin(\omega t + \delta)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $A = 5$ cm

$\omega = 4$ rads^{-1}

$\therefore\ v = 4\sqrt{5^2 - 3^2}$

বা, $v = 16$ cms^{-1}

উত্তর: 16 cms^{-1}

গাণিতিক উদাহরণ ৭.৭ : সরল দোলন গতি সম্পন্ন স্প্রিং-এর সঙ্গে যুক্ত একটি বস্তুর সরণের সমীকরণ $x = \left(2\times10^{-2}\cos\pi t\right)$m **। কত সময়ে বস্তুটি প্রথমবার সর্বোচ্চ গতিবেগ লাভ করবে?**

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ, $x = \left(2\times10^{-2}\cos\pi t\right)$m

দেয়া আছে,
$x = \left(2\times10^{-2}\cos\pi t\right)$m
যখন $v = v_{max}$ তখন $t = ?$

সুতরাং বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = \left(-2\times10^{-2}\pi\sin\pi t\right)$ms^{-1}

বেগের মান সর্বোচ্চ হবে যখন $\sin\pi t = \pm1$ হবে, অর্থাৎ,

$$\pi t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}............$$

প্রথমবার সর্বোচ্চ গতিবেগের জন্য $\pi t = \frac{\pi}{2}$

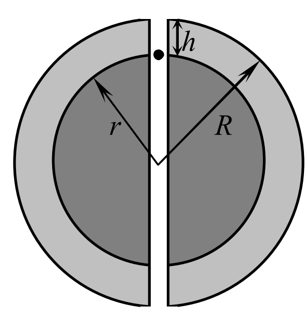
সুতরাং $t = \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2} = 0.5$s

উত্তর: 0.5 s

গাণিতিক উদাহরণ ৭.৮ : পৃথিবীকে সুষম ঘনত্বের গোলক বিবেচনা করে দেখান যে, পৃথিবীর যেকোনো ব্যাস বরাবর সুড়ঙ্গ পথে বস্তুর গতি সরল দোলন গতি। এর পর্যায়কালের রাশিমালা নির্ণয় করুন।

সমাধান : আমরা জানি, ভূ-পৃষ্ঠ থেকে h গভীরতার কোনো বিন্দুতে কোনো বস্তুর অভিকর্ষজ ত্বরণ-

$$g = \frac{4}{3}G\pi(R-h)\rho$$



এখানে, $R =$ পৃথিবীর ব্যাসার্ধ,

$h =$ ভূ-পৃষ্ঠ থেকে ঐ বিন্দুর গভীরতা, $\rho =$ পৃথিবীর গড় ঘনত্ব,

এবং $R - h$ হচ্ছে পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে ঐ বিন্দুর দূরত্ব।

ধরি, পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে ঐ বিন্দুর দূরত্ব $x = R - h$, তাহলে, $g = -\frac{4}{3}G\pi x\rho$

সুতরাং, $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4}{3}G\pi x\rho$$

ত্বরণ পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে সরণের বিপরীতমুখী হওয়ায় চিহ্ন ঋণাত্মক হয়েছে।

বস্তুর ভর m হলে এর উপর ক্রিয়াশীল বল, $F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4}{3}mG\pi\rho x$

বা, $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{4}{3}G\pi\rho x = 0$$

ধরি, $\omega^2 = \frac{4}{3}G\pi\rho$ তাহলে, $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

এটি একটি সরল দোলন গতির সমীকরণ। সুতরাং পৃথিবীর যেকোনো ব্যাস বরাবর সুড়ঙ্গ পথে বস্তুর গতি সরল দোলন গতি।

আবার যেহেতু, $\omega^2 = \frac{4}{3}G\pi\rho$

বা, $\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4}{3}G\pi\rho$ যেহেতু $\omega = \frac{2\pi}{T}$

বা, $$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4}{3}G\pi\rho$$

বা, $$T^2 = \frac{4\pi^2}{\frac{4}{3}G\pi\rho} = \frac{3\pi}{G\rho}$$

বা, $$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

এটিই পৃথিবীর যেকোনো ব্যাস বরাবর সুড়ঙ্গ পথে বস্তুর পর্যায় কালের সমীকরণ।

সার-সংক্ষেপ :

- সরল দোলন গতি সম্পন্ন কোনো কণার সরণ নির্দেশক সাধারণ সমীকরণটি হল, $x = A\sin(\omega t + \delta)$
- সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার গতিবেগ, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ । যখন $x = 0$ অর্থাৎ কণাটি যখন সাম্যাবস্থানে আসে, তখন $v = A\omega$ । এটিই বেগের সর্বোচ্চ মান; অর্থাৎ $v_{max} = A\omega$। যখন $x = A$ অর্থাৎ কণাটি যখন প্রান্তবিন্দুতে আসে, তখন $v = \omega\sqrt{A^2 - (A)^2} = 0$ এটিই বেগের সর্বনিম্ন মান; অর্থাৎ $v_{min} = 0$।
- সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার ত্বরণ $a = -\omega^2 x$ । যখন $x = 0$ অর্থাৎ কণাটি যখন সাম্যবস্থানে আসে, তখন $a = 0$। এটিই ত্বরণের সর্বনিম্ন মান। যখন $x = A$ অর্থাৎ কণাটি যখন প্রান্তবিন্দুতে আসে, তখন $a = -\omega^2 A$ এটিই ত্বরণের সর্বোচ্চ মান। বিপরীত চিহ্ন বোঝায় যে, ত্বরণ ও সরণ বিপরীতমুখী।
- সরল দোলন গতির পর্যায় কাল, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$
- সরল দোলন গতির কৌণিক কম্পাঙ্ক, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- সরল দোলন গতির কম্পাঙ্ক, $f = \frac{\omega}{2\pi}$
- **দশা ঃ** সরল দোলন গতি বিশিষ্ট কণার যেকোনো মুহূর্তের গতির অবস্থাকে দশা বলা হয়।
- **বিস্তার ঃ** কোনো একটি কম্পামান বস্তু তার সাম্যাবস্থান হতে যেকোনো এক দিকে সর্বাধিক যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে ঐ কম্পমান বস্তুর বিস্তার বলে।
- **আদি দশা বা প্ররম্ভিক দশা ঃ** সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার যাত্রার শুরুতে যে দশা থাকে, তাকে আদি দশা বা প্ররম্ভিক দশা বলা হয়।
- **দশা পার্থক্য ঃ** সরল দোলন গতিবিশিষ্ট দুটি বস্তু কণার ক্ষেত্রে, যেকোনো নির্দিষ্ট মুহূর্তে যদি প্রথম কণাটির দশা কোণ θ_1 এবং দ্বিতীয় কণাটির দশা কোণ θ_2 হয়, তাহলে কণা দুটির দশা পার্থক্য $\phi = \theta_2 - \theta_1$ ।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৭.৩

বহুনির্বাচনী প্রশ্নঃ

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন

১. একটি সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার সরণের সাপেক্ষে ত্বরণের দশা পার্থক্য-

ক. $\frac{\pi}{4}$ খ. $\frac{\pi}{2}$

গ. π ঘ. $\frac{3\pi}{2}$

২. সরল দোলন গতিসম্পন্ন কোনটি অপ্রয়োজনীয়-

ক. প্রত্যায়নী বল খ. মহাকর্ষ

গ. স্থিতিস্থাপকতা ঘ. জড়তা

৩. একটি কণা $x = -A$ থেকে $x = +A$ এর মধ্যে সরল দোলন গতি সম্পন্ন করছে। $x = 0$ থেকে $x = \frac{A}{2}$ যেতে সময় লাগে T_1 সেকেন্ড এবং $x = \frac{A}{2}$ থেকে $x = A$ যেতে T_2 সেকেন্ড সময় লাগলে-

ক. $T_1 < T_2$ খ. $T_1 > T_2$

গ. $T_1 = T_2$ ঘ. $T_1 = 2T_2$

পাঠ-৭.৪ সরল দোলন গতির শক্তি
Energy of SHM

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সরল দোলন গতির ক্ষেত্রে বিভব শক্তি ও গতি শক্তি হিসাব করতে পারবেন।
- লেখচিত্র ব্যবহার করে সরল দোলন গতি সম্পন্ন বস্তুর মোট যান্ত্রিক শক্তির সংরক্ষণশীলতা প্রমাণ করতে পারবেন।

৭.৪.১ সরল দোলন গতির শক্তি (Energy of SHM) ঃ

ধরা যাক,সরল দোলন গতিবিশিষ্ট একটি বস্তুকণার ভর $= m$ । এই গতির বিস্তার $=A$ এবং পর্যায়কাল $=T$। গতিপথের প্রান্তবিন্দু ছাড়া অন্যত্র কণার গতিবেগ থাকায় গতিশক্তি থাকে। আবার, সাম্যাবস্থান ছাড়া অন্যত্র কণার ওপর প্রত্যায়নী বল ক্রিয়া করে; ফলে ওই বলের বিরুদ্ধে কণাকে সরাতে যে কার্য করতে হয় তা কণার মধ্যে বিভবশক্তি হিসেবে সঞ্চিত থাকে।

৭.৪.২ গতিশক্তি (Kinetic energy) ঃ

কোনো মুহূর্তে কণাটির সরণ x হলে তখন কণাটির গতিবেগ $v=\omega\sqrt{A^2-x^2}$ ।

আমরা জানি, গতিশক্তি $E_k=\frac{1}{2}mv^2$

সুতরাং, মান বসালে ঐ মুহূর্তে কণার গতিশক্তি,

$$E_k=\frac{1}{2}m\left(\omega\sqrt{A^2-x^2}\right)^2$$

বা, $E_k=\frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2-x^2\right)$ …… …… …… … …… …… …… …… ……… … ……(৭.১৯)

বিশেষ ক্ষেত্র ঃ

১। কণাটি যে মুহূর্তে সাম্যাবস্থানকে অতিক্রম করে তখন $x=0$,

তাহলে, ওই মুহূর্তে গতিশক্তি $E_k=\frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2-0\right)=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$ । এটিই হল গতিশক্তির সর্বোচ্চ মান।

সুতরাং, সরল দোলন গতিতে আন্দোলিত কণার সর্বোচ্চ গতিশক্তি, $E_{max}=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=\frac{1}{2}kA^2$ $\left[\because \omega^2=\frac{k}{m}\right]$

২। যখন কণাটি গতিপথের যেকোনো প্রান্ত বিন্দুতে পৌঁছায় তখন $x=\pm A$

তাহলে, ওই মুহূর্তে কণার গতিশক্তি $E_k=\frac{1}{2}m\omega^2\left[A^2-(\pm A)^2\right]=0$ এটিই হল গতিশক্তির সর্বনিম্ন মান।

অতএব, সরল দোলন গতিতে আন্দোলিত কণার সর্বনিম্ন গতিশক্তি, $E_{min}=0$

সুতরাং, সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার সাম্যাবস্থানে গতিশক্তি সর্বোচ্চ হয় ও বিস্তারের উভয় প্রান্তবিন্দুতে শূন্য হয়।

৭.৪.৩ বিভবশক্তি (potential energy) ঃ

সরল দোলন গতিতে আন্দোলিত কণার সাম্যাবস্থান থেকে x সরণের জন্য ত্বরণ $a=-\omega^2x$ ।

তাহলে, কণাটির ওপর প্রত্যায়নী বল, $F=ma=-m\omega^2x$ ।

এরপর কণাটির খুব ক্ষুদ্র dx সরণ ঘটালে, এই dx সরণের জন্য কৃতকার্য,
$dW = -Fdx = m\omega^2 xdx$ । এখানে, ঋণাত্মক চিহ্ন বল বা ত্বরণ, সরণের বিপরীত দিকে বুঝানো হয়েছে।
অতএব, সাম্যাবস্থান থেকে x সরণের জন্য কৃতকার্য অর্থাৎ সেই অবস্থানে কণার স্থিতিশক্তি,

$$E_p = \int dW = \int_0^x m\omega^2 xdx = m\omega^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x$$

বা, $$E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x^2 - 0\right)$$

বা, $$E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad \ldots\ldots \quad (৭.২০)$$

বিশেষ ক্ষেত্র ঃ

(১) কণাটি যে মুহূর্তে সাম্যাবস্থানকে অতিক্রম করে তখন $x = 0$,

তাহলে, সেই মুহূর্তে বিভবশক্তি, $E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 \times 0 = 0$ । এটিই হল বিভবশক্তির সর্বনিম্ন মান।

সুতরাং, সরল দোলন গতিতে আন্দোলিত কণার সর্বনিম্ন বিভবশক্তি, $E_{min} = 0$

(২) যখন কণাটি গতিপথের যেকোনো প্রান্ত বিন্দুতে পৌঁছায় তখন $x = \pm A$

তাহলে, সেই মুহূর্তে কণার বিভবশক্তি, $E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\pm A\right)^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$ এটিই হল বিভবশক্তির সর্বোচ্চ মান।

সুতরাং, সরল দোলন গতিতে আন্দোলিত কণার সর্বোচ্চ বিভবশক্তি, $E_{max} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} kA^2 \quad \left[\because \omega^2 = \frac{k}{m}\right]$

অতএব, সরল দোলন গতি সম্পন্ন কোনো কণার সাম্যাবস্থানে বিভবশক্তির শূন্য হয় এবং বিস্তারের উভয় প্রান্তবিন্দুতে সর্বোচ্চ হয়।

৭.৪.৪ মোট যান্ত্রিক শক্তি (Total mechanical energy) ঃ

সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার যে কোনো অবস্থানে মোট যান্ত্রিক শক্তি,

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(A^2 - x^2\right) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \text{ ।}$$

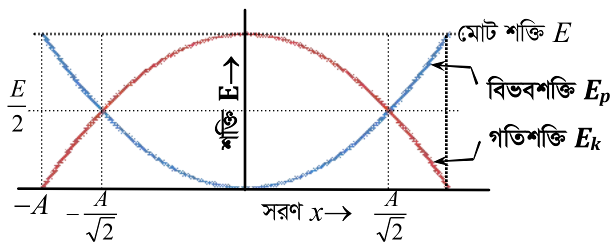
বা, $$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \quad \ldots\ldots \quad (৭.২১)$$

বা, $$E = \frac{1}{2} kA^2 \quad \ldots\ldots \quad (৭.২২)$$

যেহেতু m ও ω ধ্রুবক সেহেতু বিস্তার A অপরিবর্তিত থাকলে $E =$ ধ্রুবক; অর্থাৎ কণার মোট শক্তি সরণের ওপর নির্ভর করে না। সুতরাং সরল দোলন গতিসম্পন্ন যেকোনো বস্তুকণার গতির সঙ্গে সঙ্গে তার গতিশক্তি ও বিভবশক্তি– উভয়েই পরিবর্তিত হলেও মোট যান্ত্রিক শক্তি অপরিবর্তিত থাকে। অর্থাৎ সরল দোলন গতি শক্তির নিত্যতা সূত্র মেনে চলে। কোনো বাহ্যিক কারণে (যেমন বায়ুর বাধার জন্য) দোলন গতির বিস্তার কমতে থাকলে মোট শক্তিও কমতে থাকে। সেক্ষেত্রে বস্তুকণাটির শক্তি পারিপার্শ্বিক অন্য বস্তুতে (যেমন বিভিন্ন বায়ুকণায়) স্থানান্তরিত হয়।

সরল দোলন গতিসম্পন্ন কোনো বস্তকণার সরণের পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে গতিশক্তি ও বিভবশক্তি কীভাবে পরিবর্তিত হয় তা নিম্নলিখিত সারণিতে দেখানো হলো। এই সারণির মানগুলিকে ব্যবহার করে গতিশক্তি ও বিভবশক্তির পরিবর্তনকে লেখচিত্রের মাধ্যমেও প্রকাশ করা যায় [চিত্র ৭.৯]।

সারণি ৭.২ঃ সরণ,গতিশক্তি ও বিভবশক্তি		
সরণ (x)	গতিশক্তি (E_k)	বিভবশক্তি (E_p)
+A	0	$\frac{1}{2}m\omega^2 A^2$
$\frac{A}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{4}m\omega^2 A^2$	$\frac{1}{4}m\omega^2 A^2$
0	$\frac{1}{2}m\omega^2 A^2$	0
$-\frac{A}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{4}m\omega^2 A^2$	$\frac{1}{4}m\omega^2 A^2$
-A	0	$\frac{1}{2}m\omega^2 A^2$



চিত্র-৭.৯

এই সারণি থেকে দেখা যায়, কণার সরণ যখন $x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$ তখন,

গতিশক্তি = বিভবশক্তি = $\frac{1}{4}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m\omega^2 A^2\right) = \frac{1}{2}E$ ....(৭.২৩)

গাণিতিক উদাহরণ ৭.৯ : সরল দোলন গতিসম্পন্ন একটি কণা যখন তার মধ্য অবস্থান থেকে 2 cm দূরে, তখন গতিশক্তি বিভবশক্তি 3 গুণ। কণাটির বিস্তার নির্ণয় করুন।

সমাধান : আমরা জানি,

গতিশক্তি $E_k = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right)$

বিভবশক্তি $E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) = 3\times\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$

বা, $A^2 - x^2 = 3x^2$

বা, $A^2 = 4x^2$

বা, $A = |\pm 2x| = 2\times 2 = 4\,\text{cm}$

উত্তরঃ 4 cm

দেয়া আছে,
সরণ, $x = 2$ cm
$E_k = 3E_p$
বিস্তার, $A = ?$

গাণিতিক উদাহরণ ৭.১০ : সরল দোলন গতি সম্পন্ন করে এরূপ একটি কণার মোট শক্তি 3 J। এর ওপর সর্বাধিক যে বল ক্রিয়া করে তার পরিমাণ 1.5 N, দোলগতির পর্যায়কাল 2s এবং প্রারম্ভিক দশা 30° হলে ওই সরল দোলন গতির সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করুন।

সমাধান : মোট শক্তি $E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = 3$ J

সর্বাধিক বল $F = ma = m\omega^2 A = 1.5$ N

সুতরাং, $\frac{E}{F} = \frac{\frac{1}{2}m\omega^2 A^2}{m\omega^2 A} = \frac{3}{1.5} = 2$

বা, $\frac{1}{2}A = 2$

বা, $A = 4$ m

দেয়া আছে,
মোট শক্তি, $E = 3$ J
বল, $F = 1.5$ N
পর্যায়কাল, $T = 2$ s
প্রারম্ভিক দশা, $\delta = 30^0$

আবার $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ rads^{-1}

প্রারম্ভিক দশা, $\delta = 30° = 30\frac{\pi}{180}$ rad $= \frac{\pi}{6}$ rad

আমরা জানি, সরল দোলন গতির সমীকরণ, $x = A\sin(\omega t + \delta)$

মান বসালে, $x = 4\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$

উত্তর: $x = 4\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$

গাণিতিক উদাহরণ ৭.১১ : সরল দোলন গতিসম্পন্ন একটি বস্তুকণা যখন তার সাম্যাবস্থান থেকে 2 cm দূরে তখন তার গতিশক্তি বিভবশক্তির দ্বিগুণ। সাম্যাবস্থান থেকে কত দূরত্বে তার বিভবশক্তি গতিশক্তির দ্বিগুণ হবে ?

দেয়া আছে,
যখন সরণ $x = 3$ cm
তখন, বল, $E_k = 2E_p$
দূরত্ব, $x = ?$

সমাধান : আমরা জানি,

গতিশক্তি $E_k = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right)$

বিভবশক্তি $E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) = 2 \times \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$

বা, $A^2 - x^2 = 2x^2$

বা, $A^2 = 3x^2 = 3 \times 2^2 = 12$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে,

$\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = 2 \times \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right)$

বা, $x^2 = 2\left(A^2 - x^2\right)$

বা, $3x^2 = 2A^2$

বা, $x^2 = \frac{2}{3}A^2 = \frac{2}{3} \times 12 = 8$

বা, $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2.828$ cm

উত্তর: $\pm$ 2.828 cm

সার-সংক্ষেপ :

- **গতিশক্তি ঃ** সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right)$। কণাটি যে মুহূর্তে সাম্যাবস্থানকে অতিক্রম করে তখন $x = 0$, ওই মুহূর্তে গতিশক্তি $E_k = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - 0\right) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$। এটিই হল গতিশক্তির সর্বোচ্চ মান। যখন কণাটি গতিপথের যেকোনো প্রান্ত বিন্দুতে পৌঁছোয় তখন $x = \pm A$। ওই মুহূর্তে

কণার গতিশক্তি $E_k = \frac{1}{2}m\omega^2\left[A^2 - (\pm A)^2\right] = 0$ এটিই হল গতিশক্তির সর্বনিম্ন মান।

- **বিভবশক্তি ঃ** সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার বিভবশক্তি, $E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ । কণাটি যে মুহূর্তে সাম্যাবস্থানকে অতিক্রম করে তখন $x = 0$, ওই মুহূর্তে গতিশক্তি, $E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 \times 0 = 0$ । এটিই হল বিভবশক্তির সর্বনিম্ন মান। যখন কণাটি গতিপথের যেকোনো প্রান্ত বিন্দুতে পৌঁছায় তখন $x = \pm A$, সেই মুহূর্তে কণার বিভবশক্তি $E_p = \frac{1}{2}m\omega^2(\pm A)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$ । এটিই হল বিভবশক্তির সর্বোচ্চ মান।
- **মোট শক্তি ঃ** সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার যে কোনো অবস্থানে মোট শক্তি, $E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$ যেহেতু m ও ω ধ্রুবক সেহেতু বিস্তার A অপরিবর্তিত থাকলে, $E =$ ধ্রুবক; অর্থাৎ কণার মোট শক্তি সরণের ওপর নির্ভর করে না।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৭.৪

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন ।

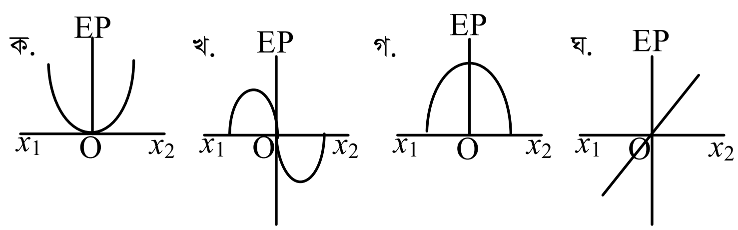
১। সরল দোলন গতি সম্পন্ন কোনো কণার মোট শক্তি E । ঐ কণার সরণ যখন বিস্তারের অর্ধেক তখন এর গতিশক্তির পরিমাণ-

ক. $\frac{3E}{4}$ খ. $\frac{E}{2}$ গ. $\frac{E}{4}$ ঘ. $\frac{\sqrt{3}E}{4}$

২। সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার সরণ যখন বিস্তারের অর্ধেক তখন তার স্থিতিশক্তি 2.5J ঐ কণার মোট শক্তির পরিমাণ-

ক. 4.5J খ. 7.5J গ. 8.5J ঘ. 10.5J

৩। একটি কণা x_1 ও x_2 দুটি বিন্দুর মধ্যে সরল দোলন গতি সম্পন্ন করছে। নিচের কোনটি এর বিভবশক্তির লেখচিত্র?



পাঠ-৭.৫ সরল দোলন গতির উদাহরণ
A Few Examples of SHM

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- উলম্ব স্প্রিং এর গতি সরল দোলন গতি প্রমাণ করতে পারবেন।
- অনুভূমিক স্প্রিং-এর গতি সরল দোলন গতি প্রমাণ করতে পারবেন।
- অল্প বিস্তারে গতিশীল একটি সরল দোলকের গতি সরল দোলন গতি রূপে ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

৭.৫.১ উলম্ব স্পিং এর গতি সরল দোলন গতি (Oscillation of a Vertical Spring) ঃ

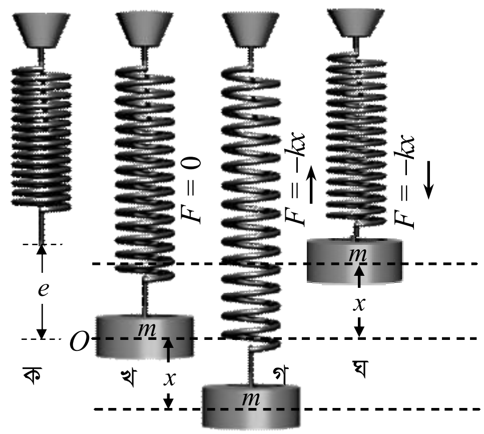
স্প্রিংয়ের এক প্রান্ত দৃঢ় অবলম্বনে আটকিয়ে অপর প্রান্তে একটি ভর ঝুলিয়ে সামান্য টেনে ছেড়ে দিলে তা উপর-নিচে দুলতে থাকে। আমরা এখন দেখব যে, এই ভরের গতি সরল দোলন গতি।

৭.১০ ক চিত্রে দৃঢ় অবলম্বন থেকে নগণ্য ভরের স্প্রিং ঝোলানো আছে।

৭.১০ খ চিত্রে স্প্রিংয়ের নিচে m ভরের একটি বস্তু যুক্ত করা হলো। ধরা যাক এর ফলে স্প্রিংটি e পরিমাণ প্রসারিত হলো। সুতরাং স্প্রিংটির বল ধ্রুবক হলো,

$k =$ একক দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির জন্য প্রয়োজনীয় বল,

বা, $$k = \frac{mg}{e} \quad \ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots(৭.২৪)$$



চিত্র-৭.১০

এই অবস্থায় O বিন্দুতে বস্তুটি সাম্যাবস্থায় আছে।

এবার m ভরটিকে তার সাম্যাবস্থান O থেকে নিচের দিকে x পরিমাণ টেনে ছেড়ে দেয়া হলো (চিত্র ৭.১০ গ)। ভরটি O-কে মধ্যাবস্থানে রেখে A বিস্তার নিয়ে উপর নিচে দুলতে থাকবে। ধরা যাক, কোনো এক সময় t-তে মধ্যাবস্থান থেকে ভরটির সরণ x (চিত্র ৭.১০ ঘ)। স্প্রিংয়ের স্থিতিস্থাপক সীমা ছাড়িয়ে না গেলে, স্প্রিংটির মধ্যে প্রযুক্ত বলের সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া বল, $F = -kx$ এর উদ্ভব হবে। এই বলই প্রত্যায়নী বল হিসেবে কাজ করে।

এই বলের ক্রিয়ায় m ভরের বস্তুটির ত্বরণ $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ হলে, প্রত্যায়নী বল, $F = m\frac{d^2x}{dt^2}$

সুতরাং, $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

বা, $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

বা, $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots(৭.২৫)$$

এটি একটি সরল দোলন গতির সমীকরণ। কারণ (৭.২৫) নং সমীকরণটি সরল দোলন গতির $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$ সমীকরণটির অনুরূপ।

সুতরাং উলম্ব স্প্রিং এর গতি সরল দোলন গতি।

৭.৫.২ উলম্ব স্প্রিং এর কয়েকটি ব্যবহার (Some uses of a Vertical Spring) ঃ

১। উলম্ব স্প্রিং এর গতি সরল দোলন গতির পর্যায় কাল নির্ণয় ঃ

আমরা জানি, সরল দোলন গতির সমীকরণ হলো,

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0 \quad \text{...... (৭.২৬)}$$

(৭.২৬) নং সমীকরণের সাথে (৭.২৫) নং সমীকরণের তুলনা করলে,

$$\omega^2=\frac{k}{m}$$

বা, $$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

বা, $$\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

বা, $$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{...... (৭.২৭)}$$

যেহেতু বাম পক্ষের সকল রাশি ধ্রুবক সেহেতু পর্যায়কাল T একটি ধ্রুব রাশি।

(৭.২৭) নং সমীকরণে (৭.২৪) নং সমীকরণের মান বসালে,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/e}}$$

বা, $$T=2\pi\sqrt{\frac{e}{g}} \quad \text{...... (৭.২৮)}$$

এখানে e হলো স্প্রিংয়ে m ভর ঝোলানোর ফলে স্প্রিংয়ের প্রাথমিক দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি।

২। উলম্ব স্প্রিং এর সাহায্যে কোনো স্থানে g এর মান নির্ণয় ঃ

(৭.২৮) নং সমীকরণ থেকে লেখা যায়,

$$T^2=4\pi^2\frac{e}{g}$$

বা, $g = 4\pi^2 \dfrac{e}{T^2}$ …… … …… …… …… …… …… … …… … ..……. …….(৭.২৯)

স্প্রিংয়ে m ভর ঝোলানোর ফলে স্প্রিংয়ের প্রাথমিক দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পরিমাপ করে কোনো স্থানে থামা ঘড়ির সাহায্য পর্যায়কাল নির্ণয় করে (৭.২৯) নং সমীকরণে বসালে ঐ স্থানে g এর মান পাওয়া যাবে।

৩। উলম্ব স্প্রিং এর স্প্রিং ধ্রুবক *k* নির্ণয় ঃ

(৭.২৭) নং সমীকরণকে বর্গ করে পাই

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$$

$\therefore$ $k = 4\pi^2 \dfrac{m}{T^2}$ …… …… …… …… …… …… …… …… ......……(৭.৩০)

স্প্রিংয়ে ঝোলানো ভর m পরিমাপ করে এবং কোনো স্থানে থামা ঘড়ির সাহায্য পর্যায়কাল নির্ণয় করে (৭.২৮) নং সমীকরণের সাহায্যে স্প্রিং ধ্রুবক k নির্ণয় করা হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৭.১২ : একটি 0.1 Nm^{-1} স্প্রিং ধ্রুবক বিশিষ্ট ভরহীন স্প্রিংকে উলম্ব ভাবে ঝুলিয়ে অপর প্রান্তে 400 g ভর চাপিয়ে নিচের দিকে একটু টেনে ছেড়ে দিলে স্প্রিংটি সরল দোল গতিতে দুলতে থাকে। এর পর্যায় কাল নির্ণয় করুন।

দেয়া আছে,
স্প্রিং ধ্রুবক, $k = 0.1$ Nm^{-1}
ভর, $m = 400$ g $= 0.4$ kg
পর্যায় কাল, $T = ?$

সমাধান : আমরা জানি, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

মান বসালে, $T = 2\times 3.14\sqrt{\dfrac{0.4}{0.1}}$

বা, $T = 2\times 3.14\times 2$

বা, $T = 12.56$ s

উত্তরঃ 12.56 s

গাণিতিক উদাহরণ ৭.১৩ : 1 kg ভরের একটি বস্তুকে একটি ভরহীন স্প্রিংয়ের এক প্রান্তে ঝুলিয়ে অপর প্রান্ত একটি দৃঢ় অবলম্বনের সাথে আটকানো হলো। স্প্রিংটিকে একটু টেনে ছেড়ে দিলে প্রতি সেকেন্ডে এক বার দুলতে থাকে স্প্রিংটি স্প্রিং ধ্রুবক নির্ণয় করুন।

দেয়া আছে,
ভর, $m = 1$ kg
কম্পাংক, $f = 1$ Hz
স্প্রিং ধ্রুবক, $k = ?$

সমাধান : আমরা জানি, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

বা, $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

বা, $f^2 = \dfrac{1}{4\pi^2}\dfrac{k}{m}$

বা, $k = 4\pi^2 m f^2$

বা, $k = 4\times 9.87\times 1\times 1^2 = 39.48$ Nm^{-1}

উত্তরঃ 39.48 Nm^{-1}

গাণিতিক উদাহরণ ৭.১৪ : 1 kg ভরের একটি বস্তুকে একটি ভরহীন স্প্রিংয়ের এক প্রান্তে ঝুলিয়ে অপর প্রান্ত একটি দৃঢ় অবলম্বনের সাথে আটকানো হলে স্প্রিংটিকে 0.3 m প্রসারিত হয়। স্প্রিংটিকে একটু টেনে ছেড়ে দিলে সরল দোল গতিতে দুলতে থাকে। এর দোলনকাল নির্ণয় করুন।

দেয়া আছে,
ভর, $m = 1$ kg
প্রসারণ, $e = 0.3$ m
দোলনকাল, $T = ?$

সমাধান : আমরা জানি, $T = 2\pi\sqrt{\frac{e}{g}}$

মান বসালে, $T = 2\times3.14\sqrt{\frac{0.3}{9.8}}$

বা, $T = 2\times3.14\times0.175$

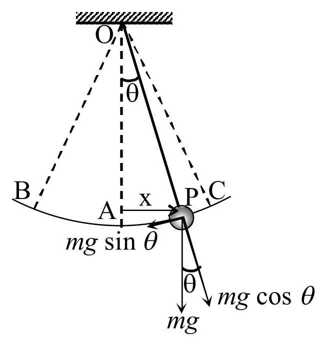
বা $T = 1.1$ s

উত্তর: $T = 1.1$ s

৭. ৫.৩ সরল দোলক (Simple Pemdulum)

৭.৫.৩.১ সরল দোলক (Simple Pemdulum)ঃ

একটি ছোটো ভারী বস্তু P -কে একটি লম্বা সুতোর সাহায্যে কোনো অবলম্বন O থেকে ঝুলিয়ে একটি দোলক তৈরী করা হলো (চিত্র-৭.১১)। সুতোটি উল্লম্বভাবে থাকলে ভারী বস্তুটি নিম্নতম অবস্থান O-তে থাকে। এই অবস্থান AO-টিকে দোলকটির স্থির অবস্থান বা সাম্যাবস্থান (equilibrium position) বলা হয়। ভারী বস্তু P-কে দোলকের বব (bob) বলা হয়। যে অবলম্বন O থেকে ববটি ঝোলে তাকে আলম্ব বা লম্বন বিন্দু (point of suspension) বলা হয়। ববটিকে তার সাম্যাবস্থান A থেকে কিছুটা সরিয়ে B থেকে ছেড়ে দিলে সেটি BAC এবং CAB বৃত্তচাপ বরাবর দুলতে থাকে। অর্থাৎ দোলকটির অবস্থান OB থেকে OC পর্যন্ত পর্যায়ক্রমে পরিবর্তিত হয়। এই এদিক ওদিক দোলায়মান গতিটি হয় পর্যাবৃত্ত গতি। তবে বাস্তব অভিজ্ঞতায় দেখা যায়, বায়ুর বাধা এবং লম্বন বিন্দুতে ঘর্ষণের জন্য দোলন ধীরে ধীরে কমতে থাকে এবং অবশেষে দোলকটি তার সাম্যাবস্থান OA-তে এসে স্থির হয়(চিত্র ৭.১১)।



চিত্র-৭.১১

দোলক বিষয়ক গাণিতিক আলোচনার সুবিধার জন্য একটি আদর্শ সরল দোলকের কল্পনা করা হয়। একটি সরল দোলককে আদর্শ বলা হয় যদি ঃ

ক) সুতোটি ভারহীন হয়,
খ) কোনোভাবেই সুতোটি দৈর্ঘ্যে হ্রাস-বৃদ্ধি না হয়, অর্থাৎ সুতোটি অসম্প্রসারণশীল হয়,
গ) দোলকের ববটি দোলনের সময় ঘর্ষণজনিত বাধা না পায়,
ঘ) দোলকের ববটি কণা সদৃশ হয়।

উল্লিখিত শর্তগুলি মেনে একটি আদর্শ সরল দোলক তৈরি করা বাস্তবে সম্ভব নয়। তাই পরীক্ষাগারে একটি ক্ষুদ্র ভারী ধাতব বস্তুকে একটি লম্বা হালকা সুতোর সাহায্যে দৃঢ় অবলম্বন থেকে ঝুলিয়ে ব্যবহারিক সরল দোলক তৈরি করা হয়।

সংজ্ঞা: একটি দীর্ঘ, ভরহীন ও অসম্পসারণশীল সুতোর সাহায্যে একটি দৃঢ় অবলম্বন থেকে একটি ছোটো ভারী বস্তুকে ঝুলিয়ে যদি মুক্তভাবে দোলানো সম্ভব হয় তবে সূতাসহ ভারী বস্তুটিকে সরল দোলক বলা হয়।

৭.৫.৩.২ সরল দোলক সম্বন্ধীয় কয়েকটি রাশি (Some Quantities Related to Simple Pendulum) ঃ

১। দোলন তল ঃ সূতাসহ ববটি যে তলে দুলতে থাকে তাকে দোলন তল বলে। চিত্রে OBAC যে তলে অবস্থিত সেটিই দোলন তল।

২। কার্যকরী দৈর্ঘ্য ঃ আলম্ব বিন্দু থেকে ববের ভারকেন্দ্র পর্যন্ত দূরত্বকে দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য বলে। r ব্যাসার্ধের গোলকাকৃতি ববের ভারকেন্দ্রটি ববের কেন্দ্রে অবস্থিত হয়; ফলে সুতোর দৈর্ঘ্য l হলে দোলকের কার্যকরী দৈর্ঘ্য $L = l + r$ ।

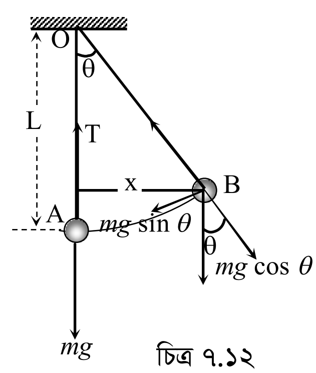
৩। বিস্তার ও কৌণিক বিস্তার ঃ সাম্যাবস্থান থেকে যেকোনো দিকে ববের সর্বাধিক সরণকে বিস্তার বলা হয়। প্রদত্ত চিত্রে, AB বা AC হল দোলকের বিস্তার। বিস্তারকে সাধারণত x দিয়ে প্রকাশ করা হয়।
ববের সাম্যাবস্থান ও সর্বাধিক সরণের অবস্থান লম্বন বিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে দোলকের কৌণিক বিস্তার বলা হয়। কৌণিক বিস্তারকে সাধারণত θ দিয়ে প্রকাশ করা হয়।
এক্ষেত্রে চিত্র ৭.১১ অনুসারে কৌণিক বিস্তার $\theta = \angle AOB = \angle AOC$
উল্লেখ্য, সরল দোকের কৌণিক বিস্তার 4° এর কম হওয়া উচিত, যাতে CAB বৃত্তচাপটি প্রায় সরলরেখার আকার ধারণ করে। তাই AB বা AC কে পিন্ডের সর্বাধিক সরণ হিসেবে ধরা হয়।

৪। দোলনকাল বা পর্যায়কাল ঃ একবার পূর্ণ দোলন দিতে যে সময় লাগে তাকে দোলনকাল বলে। দোলনকালকে T দিয়ে প্রকাশ করা হয়। ৭.১১ চিত্রে C থেকে A হয়ে B তে পৌঁছিয়ে আবার B থেকে A হয়ে C তে পৌঁছাতে যে সময় লাগে তাকে পর্যায়কাল বা দোলনকাল বলে।

৫। কম্পাঙ্ক ঃ কোনো কম্পমান বস্তু প্রতি সেকেন্ডে যতবার কম্পন বা দোলন বা পুনরাবৃত্তি ঘটায় তাকে কম্পাঙ্ক বলে। কম্পাঙ্ককে f দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

৭.৫.৩.৩ সরল দোলকের গতি সরল দোলন গতি (The Motion of a Simple Pendulum is SHM) ঃ

সরল দোলকের গতি সরল দোলন গতি (The Motion of a Simple Pendulum is SHM) ঃ



চিত্র ৭.১২

মনে করি, m ভর এবং L কার্যকরী দৈর্ঘ্যর OA একটি সরল দোলককে O বিন্দুতে ঝুলানো আছে। এর ওজন mg সরল দোলকের ভারকেন্দ্র A বিন্দু থেকে নিচের দিকে ক্রিয়াশীল এবং প্রতিক্রিয়া বল T সূতার উপর টান সৃষ্টি করে সাম্যাবস্থায় আছে। দোলকটিকে দুলিয়ে দিলে, দোলনের কোনো এক সময়ে সাম্যাবস্থান থেকে θ কোণে B অবস্থানে আসে। এখন B বিন্দুতে এর ওজন mg কে দুটি লম্ব উপাংশে বিভক্ত করা যায়। একটি $mg\cos\theta$ যা সূতায় টান সৃষ্টি করে সমতায় থাকবে অপরটি $mg\sin\theta$ যা দোলকটিকে পূর্বের অবস্থায় ফিরিয়ে আনবার জন্য বল প্রয়োগ করবে (চিত্র ৭.১২)।
সুতরাং, প্রত্যয়নী বল,

$$F = -mg\sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (৭.৩১)$$

যেহেতু বল সরণের বিপরীতমুখী তাই ঋণাত্নক চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে।
এই প্রত্যয়নী বলের জন্য ত্বরণ a হলে,

$$F = ma = -mg\sin\theta$$

বা, $a = -g\sin\theta$

θ এর মান খুব কম হলে অর্থাৎ $\theta \le 4^\circ$ হলে এবং θ কে রেডিয়ান কোণে পরিমাপ করা হলে $\sin\theta = \theta^c$ লেখা যায়।

$$\therefore a = -g\theta^c$$

বা, $a = -g \dfrac{\text{বৃত্ত চাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}} = -g \dfrac{AB}{OA}$

বা, $a = -g \dfrac{x}{L}$ (যেহেতু কোণ ছোট হলে বৃত্তচাপ ও জ্যা প্রায় সমান হয়।)

বা, $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -g \dfrac{x}{L}$

বা, $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{g}{L} x = 0$ ....(৭.৩২)

এটি একটি সরল দোলন গতির সমীকরণ, কারণ (৭.৩২) নং সমীকরণটি সরল দোলন গতির $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ সমীকরণটির অনুরূপ।

সুতরাং সরল দোলকের গতি সরল দোলন গতি।

সরল দোলকের পর্যায়কাল ঃ

আমরা জানি, সরল দোলন গতির সমীকরণ হলো,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{......... ....}(৭.৩৩)$$

(৭.৩২) নং সমীকরণের সাথে (৭.৩৩) নং সমীকরণের তুলনা করলে,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

বা, $\dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$

বা, $\dfrac{T}{2\pi} = \sqrt{\dfrac{L}{g}}$

বা, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ .... (৭.৩৪)

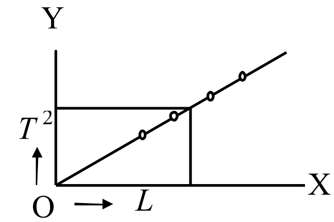
৭.৩৪ নং সমীকরণটি সরল দোলকের পর্যায়কালের সমীকরণ।

যেহেতু বাম পক্ষের সকল রাশি ধ্রুবক সেহেতু পর্যায়কাল T একটি ধ্রুব রাশি।

সরল দোলকের সাহায্যে কোনো স্থানে g নির্ণয় ঃ

(৭.৩৪) নং সমীকরণকে বর্গ করে পাই, $T^2 = 4\pi^2 \dfrac{L}{g}$

বা, $g = 4\pi^2 \dfrac{L}{T^2}$ ....(৭.৩৫)



চিত্র ৭.১৩

যখন, T = পর্যায়কাল, g = অভিকর্ষজ ত্বরণ এবং L = কার্যকরী দৈর্ঘ্য। (৭.৩৫) নং সমীকরণের L কার্যকরী দৈর্ঘ্য এবং T পর্যায়কাল নির্ণয় করে g নির্ণয় করা যায়।
একটি ভারী ক্ষুদ্র ববকে শক্ত ও সরু সুতার সাহায্যে বেঁধে স্ট্যান্ডের সাথে ঝুলিয়ে দিয়ে দোলক তৈরী করে স্লাইড ক্যালিপার্সের সাহায্যে ববের ব্যাস নির্ণয় করে ব্যাসার্ধ r বের করা হয়। মিটার স্কেলের সাহায্যে ববের হুক সহ সুতার দৈর্ঘ্য l নির্ণয় করলে দোলকের কার্যকরী দৈর্ঘ্য $L = l + r$ পাওয়া যায়। এবার সরল দোলকটিকে সাম্যাবস্থান থেকে এমন ভাবে এক পার্শ্বে একটু টেনে ছেড়ে দিতে হবে যেন দোলকটি অল্প বিস্তারে দুলতে থাকবে এবং কৌণিক বিস্তার $4°$ এর কম হয় $(\theta \le 4°)$। যখন দোলকটি সুষম গতিতে থাকবে তখন থামা ঘড়ির সাহায্যে ২০ বা ২৫ দোলনের সময় নির্ণয় করে তাকে দোলন সংখ্যা দিয়ে ভাগ করে দোলনকাল T নির্ণয় হয়।
সুতার দৈর্ঘ্য পরিবর্তন করে দোলকের কার্যকরী দৈর্ঘ্য পরিবর্তন করে এবং প্রতি কার্যকরী দৈর্ঘ্য জন্য দোলনকাল T নির্ণয় করা হয় । প্রতিটি কার্যকরী দৈর্ঘ্যকে স্ব স্ব দোলনকালের বর্গ দিয়ে ভাগ করে প্রতিটি ক্ষেত্রে $\dfrac{L}{T^2}$ বের করা হয়। $\dfrac{L}{T^2}$ এর গড় নির্ণয় করে এই মান (৭.৩৫) নং সমীকরণে বসিয়ে g এর মান নির্ণয় করা যায়। তবে L-T^2 লেখচিত্র থেকে $\dfrac{L}{T^2}$ এর মান নির্ণয় করাই শ্রেয়। লেখ কাগজের X অক্ষে L এবং Y অক্ষে T^2 নিয়ে প্রতিটি কার্যকরী দৈর্ঘ্যর সাপেক্ষে T^2 মান বসিয়ে লেখচিত্র অঙ্কন করতে হয়। (৭.৩৫) নং সমীকরণে L এর স্থলে x এবং T^2 এর স্থলে y বসালে

$$g = 4\pi^2 \frac{x}{y}$$

বা, $y = \dfrac{4\pi^2}{g} x$ ....(৭.৩৬)

(৭.৩৬) নং সমীকরণটি $y = mx + c$ এর অনুরূপ। এখানে ঢাল $m = \dfrac{4\pi^2}{g}$ এবং $c = 0$। সুতরাং (৭.৩৬) নং সমীকরণটি একটি সরল রেখার সমীকরণ যা মূল বিন্দু দিয়ে যাবে। অর্থাৎ সরল দোলকের $L - T^2$ লেখচিত্রটি একটি মূল বিন্দুগামী সরল রেখা (চিত্র:৭.১৩)। এবার লেখচিত্রের কোনো পছন্দনীয় বিন্দু থেকে X এবং Y অক্ষে লম্ব টানলে ঐ বিন্দুর সাপেক্ষে L এবং T^2 এর মান পাওয়া যাবে। লেখচিত্র থেকে L এবং T^2 এর মান (৭.৩৫) নং সমীকরণে বসিয়ে g এর মান নির্ণয় করা যায়।

সরল দোলকের সূত্র এবং সূত্র থেকে পর্যায়কালের রাশিমালা নির্ণয় ঃ

অল্প বিস্তারে আন্দোলিত কোনো সরল দোলকের দোলনকাল চারটি সূত্র মেনে চলে। বিজ্ঞানী গ্যালিলিও এই সূত্রগুলো আবিস্কার করেন। সূত্রগুলো নিম্নে দেয়া হলো,

১ম সূত্র বা সমকাল সূত্র ঃ কার্যকরী দৈর্ঘ্য এবং স্থান অপরিবর্তিত থাকলে $4°$ কৌণিক বিস্তারের মধ্যে সকল সরল দোলকের দোলনকাল ধ্রুব থাকে।

অর্থাৎ, $T \propto k$ (যখন g এবং L অপরিবর্তনীয় এবং $\theta \le 4°$)

২য় সূত্র বা দৈর্ঘ্যের সূত্র ঃ স্থান অপরিবর্তিত থাকলে $4°$ কৌণিক বিস্তারের মধ্যে সকল সরল দোলকের দোলনকাল তার কার্যকরী দৈর্ঘ্যের বর্গমূলের সমানুপাতিক।

অর্থাৎ, $T \propto \sqrt{L}$ (যখন g অপরিবর্তনীয় এবং $\theta \le 4°$)

৩য় সূত্র বা ত্বরণে সূত্র ঃ কার্যকরী দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত থাকলে $4°$ কৌণিক বিস্তারের মধ্যে সকল সরল দোলকের দোলনকাল ঐ স্থানের অভিকর্ষজ ত্বরণের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক।

অর্থাৎ, $T \propto \sqrt{\frac{1}{g}}$ (যখন L অপরিবর্তনীয় এবং $\theta \le 4°$)

৪র্থ সূত্র বা ভরের সূত্র ঃ কার্যকরী দৈর্ঘ্য এবং স্থান অপরিবর্তিত থাকলে $4°$ কৌণিক বিস্তারের মধ্যে সকল সরল দোলকের দোলনকাল ববের ভর, আকৃতি, বা উপাদানের ঘনত্বের উপর নির্ভর করে না।

সরল দোলকের ২য় এবং ৩য় সূত্র থেকে পাই,

$T \propto \sqrt{L}$ (যখন g অপরিবর্তনীয় এবং $\theta \le 4°$)

এবং $T \propto \sqrt{\frac{1}{g}}$ (যখন L অপরিবর্তনীয় এবং $\theta \le 4°$)

একত্রিত করলে, $T \propto \sqrt{\frac{L}{g}}$

বা, $T = k\sqrt{\frac{L}{g}}$ এখানে, k একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক।

যে স্থানে g এর মান জানা বিভিন্ন কার্যকরী দৈর্ঘ্য L নিয়ে তার সাপেক্ষে T এর মান নির্ণয় করে উপরের সমীকরণে বসালে দেখা যায় k এর মান 2π এর সমান হয়।

$\therefore$ উপরের সমীকরণে k এর মান বসালে আমরা পাই,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{......... ....(৭.৩৭)}$$

এটাই সরল দোলকের দোলনকালের সমীকরণ। এই সমীকরণের সাহায্যে অভিকর্ষজ ত্বরণ g এর মান নির্ণয় করা যায়।

৭.৫.৩.৪ সরল দোলকের কয়েকটি ব্যবহার (Some Uses of a Simple Pemdulum) ঃ

১। কোনো স্থানের উচ্চতা নির্ণয় ঃ

আমরা জানি, ভূ-পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ,

$$g = G\frac{M}{R^2} \quad \text{......... ....(৭.৩৮)}$$

পৃথিবীর পৃষ্ঠ থেকে h উচ্চতায় অর্থাৎ পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে $(R+h)$ দূরত্বে অভিকর্ষীয় ত্বরণ g' হলে,

$$g' = G\frac{M}{(R+h)^2}$$

সুতরাং, $\dfrac{g}{g'}=\dfrac{(R+h)^2}{R^2}$

বা, $\sqrt{\dfrac{g}{g'}}=\dfrac{R+h}{R}$ ....(৭.৩৯)

এখন একটি নির্দিষ্ট কার্যকরী দৈর্ঘ্য L এর সরল দোলকের পৃথিবী পৃষ্ঠে এবং পৃথিবীর পৃষ্ঠ থেকে h উচ্চতায় পর্যায়কাল যথাক্রমে T এবং T' হলে, (৭.৩৭) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

এবং $T'=2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g'}}$

বা, $\dfrac{T'}{T}=\sqrt{\dfrac{g}{g'}}$ ....(৭.৪০)

(৭.৩৯) নং সমীকরণের মান (৭.৪০) নং সমীকরণে বসালে,

$$\frac{T'}{T}=\frac{R+h}{R}=1+\frac{h}{R}$$

বা, $\dfrac{h}{R}=\dfrac{T'}{T}-1=\dfrac{T'-T}{T}$

বা, $h=\dfrac{R}{T}(T'-T)$ ....(৭.৪১)

R এর মান জানা থাকলে এবং থামাঘড়ির সাহায্যে T এবং T' নির্ণয় করে (৭.৪১) নং সমীকরণে মান বসিয়ে h এর মান পাওয়া যায়।

২। খনি গর্ভের গভীরতা নির্ণয় ঃ

মনে করি, একটি বস্তু ভূ-পৃষ্ঠ থেকে h গভীরতায় অবস্থান করছে। এ অবস্থায় পৃথিবী কেন্দ্র থেকে $(R-h)$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট পৃথিবীর আয়তনের ভরটুকু মহাকর্ষীয় বলে কার্যকর হবে। যদি R-h ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট পৃথিবীর ভর M' এবং ঐ স্থানের অভিকর্ষীয় ত্বরণ g' হয় তবে,

$g'=G\dfrac{M'}{(R-h)^2}$ ....(৭.৪২)

$(R-h)$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট পৃথিবীর আয়তন,

$$V'=\frac{4}{3}\pi(R-h)^3$$

যদি পৃথিবীর গড় ঘনত্ব ρ হয় তবে $(R-h)$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট পৃথিবীর ভর,

$$M'=V'\rho=\frac{4}{3}\pi(R-h)^3\rho$$

পৃথিবীর ভর M' এর মান (৭.৪২) নং সমীকরণে বসালে,

$$g' = G\frac{\frac{4}{3}\pi\rho(R-h)^3}{(R-h)^2}$$

বা, $$g' = \frac{4}{3}G\pi\rho(R-h) \quad \text{...... ....} (৭.৪৩)$$

আবার পৃথিবীর গড় ঘনত্ব ρ হয় তবে পৃথিবীর ভর,

$$M = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$$

(৭.৩৮) নং সমীকরণে M এর মান বসালে,

$$g = G\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{R^2}$$

বা, $$g = \frac{4}{3}G\pi\rho R \quad \text{...... ....} (৭.৪৪)$$

(৭.৪৩) নং সমীকরণকে (৭.৪৪) নং সমীকরণ দিয়ে ভাগ করলে,

$$\frac{g'}{g} = \frac{\frac{3}{4}\pi\rho G(R-h)}{\frac{3}{4}\pi\rho GR} = \frac{R-h}{R}$$

বা, $$\frac{g'}{g} = 1 - \frac{h}{R} \quad \text{...... ....} (৭.৪৫)$$

এখন একটি নির্দিষ্ট কার্যকরী দৈর্ঘ্য L এর সরল দোলকের পৃথিবী পৃষ্ঠে এবং পৃথিবীর অভ্যন্তরে h গভীরতায় পর্যায়কাল যথাক্রমে T এবং T' হলে,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

এবং $$T' = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g'}}$$

বা, $$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{g'}{g}}$$

বা, $$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{g'}{g}$$

এই সমীকরণে (৭.৪৫) নং সমীকরণের মান বসালে,

$$\frac{T^2}{T'^2} = 1 - \frac{h}{R}$$

বা, $$h = \left(1 - \frac{T^2}{T'^2}\right)R \quad \text{...... ....} (৭.৪৬)$$

R এর মান জানা থাকলে এবং থামাঘড়ির সাহায্যে T এবং T' নির্ণয় করে (৭.৪৬) নং সমীকরণে মান বসিয়ে গভীরতা h এর মান পাওয়া যায়।

৩। সেকেন্ড দোলকের কার্যকরী দৈর্ঘ্য নির্ণয় ঃ

যে সরল দোলকের পর্যায়কাল 2s তাকে সেকেন্ড দোলক বলে।

আমরা জানি, সরল দোলকের পর্যায়কালের সমীকরণ,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

সেকেন্ড দোলকের ক্ষেত্রে, $T = 2$ বসালে,

$$2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

বা, $1 = \pi^2 \frac{L}{g}$

বা, $L = \frac{g}{\pi^2} = \frac{g}{9.87}$ ....…...(৭.৪৭)

সুতরাং, কোনো স্থানে g এর মান জানা থাকলে (৭.৪৭) নং সমীকরণে মান বসিয়ে সরল দোলকের কার্যকরী দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা যায়।

৪। পৃথিবীর ভর নির্ণয় ঃ

মনে করি, পৃথিবীর ভর M। পৃথিবীকে সুষম R ব্যাসার্ধের গোলক বিবেচনা করলে এবং অভিকর্ষীজ ত্বরণ g হলে,

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

বা, $M = \frac{gR^2}{G}$ ....….... ....…(৭.৪৮)

(৭.৩৭) নং সমীকরণ থেকে আমরা জানি, কার্যকরী দৈর্ঘ্য L এর সরল দোলকের পর্যায়কাল,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

বা, $g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$

(৭.৪৮) নং সমীকরণে g এর মান বসালে,

$$M = \frac{4\pi^2 R^2}{G} \times \frac{L}{T^2}$$ .... …(৭.৪৯)

G এবং R এর আসন্ন মান যথাক্রমে $6.7\times10^{-11}\text{N m}^2\text{kg}^{-2}$ এবং 6.4×10^6 m

(৭.৪৯) নং সমীকরণে আসন্ন মান বসালে,

$$M = \frac{4\times9.87\times(6.4\times10^6)^2}{6.7\times10^{-11}} \times \frac{L}{T^2}$$

$$M = 3.049\times10^{24}\times\frac{L}{T^2}$$ ....…(৭.৫০)

সুতরাং $\frac{L}{T^2}$ এর মান নির্ণয় করে উক্ত (৭.৫০) সমীকরণে মান বসিয়ে পৃথিবীর ভর নির্ণয় করা যায়।

গাণিতিক উদাহরণ ৭.১৫ : একটি সরল দোলকের দৈর্ঘ্য 21% বৃদ্ধি পেলে তার পর্যায়কাল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?

সমাধান : মনে করি, সরল দোলকের আদি দৈর্ঘ্য L ।

প্রশ্নানুসারে,সরল দোলকের কার্যকরী দৈর্ঘ্য L - এর বৃদ্ধি $= \dfrac{21}{100}L = 0.21L$

তাহলে বর্ধিত কার্যকরী দৈর্ঘ্য $L' = L + 0.21L = 1.21L$

আমরা জানি, $T \propto \sqrt{L}$

যদি, আদি ও বর্ধিত কার্যকরী দৈর্ঘ্যর পর্যায়কাল যথাক্রমে T ও T' হয় তবে,

দেয়া আছে,
সরল দোলকের কার্যকরী দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি=21%
পর্যায়কালের শতকরা বৃদ্ধি = ?

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{L'}{L}}$$

মান বসালে, $\dfrac{T'}{T} = \sqrt{\dfrac{1.21L}{L}} = \sqrt{1.21} = 1.1$

বা, $T' = 1.1T$

অতএব, পর্যায়কাল বৃদ্ধি $T' - T = 1.1T - T = 0.1T = \dfrac{1}{10}T$

পর্যায়কালের শতকরা বৃদ্ধি, $\dfrac{1}{10}T \times 100\% = T \times 10\%$

উত্তরঃ পর্যায় কাল 10% বৃদ্ধি পাবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৭.১৬ : চন্দ্র পৃষ্ঠে একটি সরল দোলকের দৈর্ঘ্য কত হবে যদি তার পর্যায়কাল পৃথিবী পৃষ্ঠে একটি সরল দোলকের পর্যায়কালের সমান হয়? (পৃথিবীর ভর চন্দ্রের ভরের 80 গুণ এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ চন্দ্রের ব্যাসার্ধের 4 গুণ বেশি।)

সমাধান : আমরা জানি, $g = G\dfrac{M}{R^2}$

পৃথিবী পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ $g_e = G\dfrac{M_e}{R_e^2}$

চন্দ্র পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ $g_m = G\dfrac{M_m}{R_m^2}$

দেয়া আছে,
$\dfrac{M_e}{M_m} = 80$
$\dfrac{R_e}{R_m} = 4$
$T_e = T_m$
$L = ?$

সুতরাং, $\dfrac{g_e}{g_m} = \dfrac{M_e R_m^2}{M_m R_e^2} = \dfrac{M_e}{M_m} \times \left(\dfrac{R_m}{R_e}\right) = 80 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = 5$

আবার আমরা জানি, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

পৃথিবী পৃষ্ঠে পর্যায় কাল, $T_e = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_e}{g_e}}$

চন্দ্র পৃষ্ঠে পর্যায় কাল, $T_m = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_m}{g_m}}$

অতএব, প্রশ্নানুসারে $2\pi\sqrt{\dfrac{L_e}{g_e}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_m}{g_m}}$

বা, $\frac{L_e}{g_e} = \frac{L_m}{g_m}$

বা, $\frac{L_e}{L_m} = \frac{g_e}{g_m} = 5$

বা, $L_m = \frac{L_e}{5}$

উত্তর: চন্দ্র পৃষ্ঠে ও পৃথিবী পৃষ্ঠে একই পর্যায় কাল বিশিষ্ট সরল দোলকের ক্ষেত্রে চন্দ্র পৃষ্ঠের কার্যকরী দৈর্ঘ্য পৃথিবী পৃষ্ঠের কার্যকরী দৈর্ঘ্যর $\frac{1}{5}$ গুণ হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৭.১৭ : 1.8 s এবং 2 s পর্যায়কাল বিশিষ্ট দুটি দোলককে একসঙ্গে দোলানো হল। কত সেকেন্ড পরে দ্রুততর দোলক অপরটি অপেক্ষা একটি পূর্ণদোলন বেশি সম্পন্ন করবে? সেই সময়ের মধ্যে দ্রুততর দোলকটি মোট কয়টি পূর্ণদোলন সম্পন্ন করবে?

দেয়া আছে,
$T_1 = 1.8$ s
$T_2 = 2$ s
$t = ?$
$n = ?$

সমাধান : মনে করি t সেকেন্ড পর দ্রুততর দোলকটি একটি পূর্ণ দোলন বেশী দেয়।

তাহলে t সেকেন্ড সময়ে 1.8 s পর্যায়কাল সম্পন্ন দোলকটির দোলন সংখ্যা $\frac{t}{1.8}$

এবং t সেকেন্ড সময়ে 2 s পর্যায়কাল সম্পন্ন দোলকটির দোলন সংখ্যা $\frac{t}{2}$

সুতরাং, প্রশ্নানুসারে, $\frac{t}{1.8} - \frac{t}{2} = 1$

বা, $\frac{2t - 1.8t}{3.6} = 1$

বা, $0.2t = 3.6$

বা, $t = 18$ s

আবার, 18 সেকেন্ডে 1.8 s পর্য্যায় কাল সম্পন্ন দোলকটি দোলন দেয় $\frac{18}{1.8} = 10$টি।

উত্তর: 18 সেকেন্ড পর দ্রুততর দোলকটি একটি বেশী পূর্ণদোলন সম্পন্ন করবে এবং ইতি মধ্যে 10টি দোলন সম্পন্ন করবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৭.১৮ : একটি m ক্ষুদ্র গোলককে টেবিলে রাখা R বক্রতা ব্যাসার্ধের পাত্রে অবতল পৃষ্ঠে রাখা হলো গোলকটিকে তার সাম্যাবস্থান থেকে সামান্য সরিয়ে ছেড়ে দেওয়া হল। যদি গোলকের সরণ অবতল পৃষ্ঠের বক্রতা ব্যাসার্ধের তুলনায় অতি ক্ষুদ্র হয় তবে দেখান যে গোলকটি সরল দোলন গতি সম্পন্ন করে (তলটিকে ঘর্ষণহীন বিবেচনা করুন)।

সমাধান : m ভর বিশিষ্ট ক্ষুদ্র গোলকটিকে তার সাম্যাবস্থান A থেকে সামান্য সরিয়ে ছেড়ে দেওয়া হলো। একটি নির্দিষ্ট মুহূর্তে গোলকটি B অবস্থানে আছে এবং অবতল পৃষ্ঠের বক্রতা কেন্দ্র O। AO = R হলো পাত্রের ব্যাসার্ধ এবং এখানে দোলকের কার্যকরী দৈর্ঘ্যের ন্যায় কাজ করছে। এবং $\angle AOB = \theta$ (ধরা যাক)।

B বিন্দুতে গোলকের ওজন mg কে দুটি লম্ব উপাংশে বিভাজিত করা যায়। একটি $mg\cos\theta$ অবতল পৃষ্ঠের সঙ্গে লম্বভাবে ক্রিয়া করে। অপরটি $mg\sin\theta$ অবতল পৃষ্ঠের স্পর্শক বরাবর ক্রিয়া করে।

$mg\cos\theta$ উপাংশ বলটি অবতল পৃষ্ঠের লম্ব প্রতিক্রিয়া বল T-কে প্রশমিত করে এবং $mg\sin\theta$ উপাংশটি গোলকটিকে সাম্যাবস্থানে আনতে চেষ্টা করে।

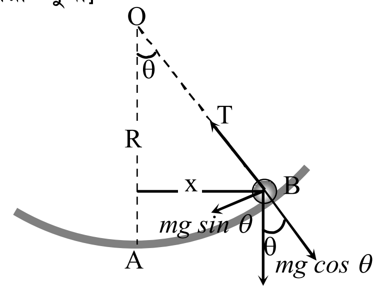
অতএব, $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-mg\sin\theta$ [ঋণাত্মক চিহ্ন দেওয়া হলো কারণ সরণ ও বল বিপরীতমুখী]

বা, $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-g\theta$ [θ খুব ক্ষুদ্র বলে $\sin\theta=\theta$]

বা, $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-g\dfrac{x}{R}$ বা, $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{g}{R}x=0$

বা, $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ [এখানে, $\omega^2=\dfrac{g}{R}$]

অতএব, m ভর বিশিষ্ট ক্ষুদ্র গোলকটি সরল দোলন গতি সম্পন্ন করছে। (প্রমাণিত)



চিত্র-৭.১৪

সার-সংক্ষেপ :

- স্প্রিং এর সরল দোলন গতির পর্যায় কাল, $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ । এই দোলনকাল অভিকর্ষ ত্বরণের উপর নির্ভরশীল নয়।
- **সরল দোলক ঃ** একটি দীর্ঘ, ভারহীন ও অসম্প্রসারণশীল সুতোর সাহায্যে একটি দৃঢ় অবলম্বন থেকে একটি ছোট ভারী বস্তুকে ঝুলিয়ে যদি মুক্তভাবে দোলানো সম্ভব হয় তবে সূতাসহ ববটিকে সরল দোলক বলা হয়।
- **কার্যকরী দৈর্ঘ্য ঃ** আলম্ব বিন্দু থেকে ববের ভারকেন্দ্র পর্যন্ত দূরত্বকে দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য বলে। r ব্যাসার্ধের গোলকাকৃতি ববের ভারকেন্দ্রটি ববের কেন্দ্রে অবস্থিত হয়; ফলে সুতোর দৈর্ঘ্য l হলে,
  দোলকের কার্যকরী দৈর্ঘ্য = সুতার দৈর্ঘ্য + ববের ব্যাসার্ধ। অর্থাৎ, $L=l+r$ ।
- **দোলন তল ঃ** সুতাসহ ববটি যে তলে দুলতে থাকে তাকে দোলন তল বলে।
- **বিস্তার ঃ** সাম্যাবস্থান থেকে যেকোনো দিকে ববের সর্বাধিক সরণকে বিস্তার বলা হয়।
- **কৌণিক বিস্তার ঃ** ববের সাম্যাবস্থান ও সর্বাধিক সরণের অবস্থান লম্বন বিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে দোলকের কৌণিক বিস্তার বলা হয়।
- **পর্যায় কাল ঃ** একবার পূর্ণ দোলন দিতে যে সময় লাগে তাকে দোলন কাল বলে।
- **কম্পাঙ্ক ঃ** কোনো কম্পমান বস্তু প্রতি সেকেন্ডে যতবার কম্পন বা দোলন বা পুনরাবৃত্তি ঘটায় তাকে কম্পাঙ্ক বলে।
- সরল দোলকের সরল দোলন গতির পর্যায় কাল, $T=2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$
- **সরল দোলকের সূত্র ঃ**
- **১ম সূত্র বা সমকাল সূত্র ঃ** কার্যকরী দৈর্ঘ্য এবং স্থান অপরিবর্তিত থাকলে 4° কৌণিক বিস্তারের মধ্যে সকল সরল দোলকের দোলনকাল ধ্রুব থাকে।
- **২য় সূত্র বা দৈর্ঘ্যের সূত্র ঃ** স্থান অপরিবর্তিত থাকলে 4° কৌণিক বিস্তারের মধ্যে সকল সরল দোলকের দোলনকাল তার কার্যকরী দৈর্ঘ্যে বর্গমূলের সমানুপাতিক। অর্থাৎ, $T\propto\sqrt{L}$
- **৩য় সূত্র বা ত্বরণে সূত্র ঃ** কার্যকরী দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত থাকলে 4° কৌণিক বিস্তারের মধ্যে সকল সরল দোলকের দোলনকাল ঐ স্থানের অভিকর্ষজ ত্বরণের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক। অর্থাৎ, $T\propto\sqrt{\dfrac{1}{g}}$
- **৪র্থ সূত্র বা ভরের সূত্র ঃ** কার্যকরী দৈর্ঘ্য এবং স্থান অপরিবর্তিত থাকলে 4° কৌণিক বিস্তারের মধ্যে সকল সরল দোলকের দোলনকাল ববের ভর, আকৃতি বা উপাদানের ঘনত্বের উপর নির্ভর করে না।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৭.৫

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন।

১. $100\ \mathrm{Nm^{-1}}$ স্প্রিং ধ্রুবক বিশিষ্ট একটি স্প্রিং এর দৈর্ঘ্য 0.01 m বৃদ্ধি করতে কত বল প্রয়োজন?

ক. 1 N   খ. 2 N   গ. 10 N   ঘ. 100 N

২. দুটি ভিন্ন স্প্রিং ধ্রুবক বিশিষ্ট স্প্রিং এর খোলা প্রান্তে সমান মানের ভর চাপালে এদের পর্যায় কালে অনুপাত কত হবে?

ক. $\frac{T_1}{T_2}=\frac{k_1}{k_2}$ খ. $\frac{T_1}{T_2}=\frac{k_2}{k_1}$ গ. $\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$ ঘ. $\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$

৩. পর্যায়কাল দ্বিগুণ করতে হলে সরল দোলকের কার্যকরী দৈর্ঘ্য কতগুণ করতে হবে?

ক. দ্বিগুণ   খ. চারগুণ   গ. অর্ধেক   ঘ. এক চতুর্থাংশ

৪. যে স্থানে $g = 9.8\ \mathrm{ms^{-2}}$ সেখানে একটি সেকেন্ড দোলকের পর্যায় কাল হবে-

ক. 9.8 m   খ. 0.993 m   গ. 1 m   ঘ. 1.993 m

৫. $L-T^2$ লেখচিত্রের প্রকৃতি কিরূপ?

ক. বৃত্ত   খ. সরল রেখা   গ. মূল বিন্দুগামী সরল রেখা   ঘ. অধিবৃত্ত

৬. একটি সরল দোলক এবং একটি স্প্রিং দোলকের পর্যায় কাল 2sec। এদের পৃথিবীর কেন্দ্রে নিয়ে গেলে এদের পর্যায় কাল হবে-

	সরল দোলকের পর্যায় কাল	স্প্রিং-এর পর্যায় কাল
ক.	2s	2s
খ.	0s	0s
গ.	∞	∞
ঘ.	∞	2s

৭. একটি স্প্রিং-এ 5 kg ভর ঝুলানো হলো। এতে দৈর্ঘ্য 20 cm বৃদ্ধি পেল। স্প্রিং ধ্রুবকের মান হচ্ছে-

ক. 24.5 N/m   খ. 245 N/m   গ. 250 N/m   ঘ. 2450 N/m

৮. চাঁদে সরল দোলকের দোলনকাল পৃথিবীর তুলনায় কেমন হবে?

ক. বেশি হবে   খ. কম হবে   গ. সমান হবে   ঘ. অর্ধেক হবে

৯. একটি সরল দোলকের দৈর্ঘ্য 1% বৃদ্ধি করলে এর দোলনকাল?

ক. 1% বৃদ্ধি পাবে   খ. 0.5% বৃদ্ধি পাবে   গ. 0.5% হ্রাস পাবে   ঘ. 2% বৃদ্ধি পাবে

১০. কোন সরল ছন্দিত স্পন্দন গতি সম্পন্ন কণার বিস্তার 3 cm এর সর্বোচ্চ বেগ $6.24\ \mathrm{cms^{-1}}$ হলে, কণাটির পর্যায়কাল কত?

ক. 3×10^{-2} s   খ. 0.21 s   গ. 3 s   ঘ. 0 (শূন্য)

পাঠ-৭.৬ ব্যবহারিক -৬ একটি স্প্রিং এর স্প্রিং ধ্রুবক নির্ণয়
Determination of Spring Constant of a Spring

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- উলম্ব স্প্রিং-এর দোলন প্রকৃতি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- উলম্ব স্প্রিং-এর স্প্রিং ধ্রুবক পরিমাপ করতে পারবেন।
- উলম্ব স্প্রিং-এর উপর চাপানো ভরের পরিবর্তনে স্প্রিং-এর কিরূপ বিকৃতি হয় তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

পরীক্ষণের নামঃ একটি স্প্রিং এর স্প্রিং ধ্রুবক নির্ণয় (Determination of Spring Constant of a Spring)ঃ

তত্ত্বঃ স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে একটি স্প্রিংকে একক পরিমাণ বৃদ্ধি করতে যে পরিমাণ বল প্রয়োগ করতে হয় তাকে ঐ স্প্রিংয়ের বল বা স্প্রিং ধ্রুবক বলে।

চিত্র ৭.১৫

একটি স্প্রিংয়ের এক প্রান্ত কোনো দৃঢ় অবলম্বন থেকে ঝুলিয়ে অপর প্রান্তে একটি m ভরের বস্তু ঝুলিয়ে নিচের দিকে সমান্য টেনে ছেড়ে দিলে তা সরণ দোলকের ন্যায় উপর-নিচে দুলতে থাকে (চিত্রঃ ৭.১৫)। স্প্রিংটির স্প্রিং ধ্রুবক k হলে এর দোলনকাল-

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

বা, $$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$$

$$\therefore\ k = 4\pi^2 \frac{m}{T^2} \quad \text{......... ....}(৭.৫১)$$

এখন বিভিন্ন ভর m এর জন্য দোলনকাল T নির্ণয় করে প্রতি m ভরের জন্য $\frac{m}{T^2}$ নির্ণয় করে $\frac{m}{T^2}$ এর গড় (৭.৫১) সমীকরণে বসালে k এর মান পাওয়া যাবে। তাছাড়া প্রতি চাপানো ভরের জন্য প্রাপ্ত T^2 মান নিয়ে $m - T^2$ লেখচিত্র অঙ্কন করা হলে লেখচিত্রটি মূল বিন্দুগামী একটি সরল রেখা হবে। লেখচিত্র থেকে m এর যেকোনো মানের জন্য অনুসঙ্গিক T^2 এর মান নির্ণয় করে (৭.৫১) নং সমীকরণে বসিয়ে ঐ স্প্রিংয়ের স্প্রিং ধ্রুবক k নির্ণয় করা যায়।

যন্ত্রপাতি ঃ

একটি হালকা স্প্রিং, কয়েকটি জানা ভর, একটি থামা ঘড়ি ইত্যাদি।

কাজের ধারা ঃ

১। প্রথমে পরীক্ষাধীন স্প্রিংয়ের এক প্রান্ত কোনো দৃঢ় অবলম্বন থেকে বেঁধে ঝুলিয়ে দিয়ে অপর প্রান্তে একটি ওজন ধারক যুক্ত করতে হবে।

২। পরীক্ষার জন্য চাপানো ভরগুলো ছোট হতে শুরু করে সমস্ত ভরগুলো ওজন ধারকে চাপালেও যেন স্প্রিংটি স্থিতিস্থাপক সীমা অতিক্রম না করে।

৩। এখন ওজন ধারকে একটি m ভর চাপিয়ে পরীক্ষাধীন স্প্রিংটি স্থিতি অবস্থায় আসলে ভরটিকে নিচের দিকে সামান্য টেনে ছেড়ে দেয়া হয়, এতে ভরটি উপর-নীচ সরল দোলকের ন্যায় দোল খেতে থাকবে।

৪। দোলায়মান অবস্থায় ভরটি যে কোনো এক প্রান্তে এলে থামা ঘড়ি চালু করে 20টি পূর্ণ দোলনের সময় নির্ণয় করতে হবে।

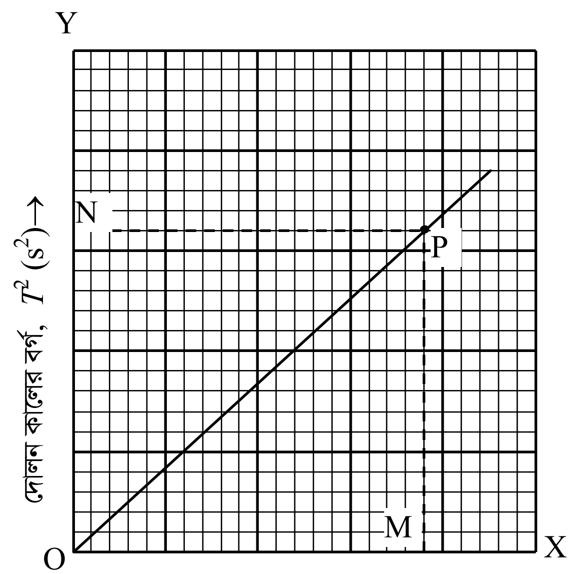
৫। একই চাপানো ভরের জন্য কমপক্ষে তিনবার 20টি পূর্ণ দোলনের সময় নিয়ে তার গড় সময় নির্ণয় করতে হবে। এ গড় সময়কে 20 দিয়ে ভাগ করে m ভরের জন্য দোলনকাল T নির্ণয় করতে হবে।

৬। ওজন ধারকের উপর আরো একটি m ভর চাপিয়ে একই পদ্ধতিতে দোলনকাল T নির্ণয় করতে হবে।

৭। এই ভাবে এক এক করে সব ভরগুলো ওজন ধারকের উপর চাপিয়ে একই পদ্ধতিতে প্রতিবারের জন্য দোলনকাল T নির্ণয় করতে হবে।

৮। প্রতিক্ষেত্রে $\frac{m}{T^2}$ বের করে গড় $\frac{m}{T^2}$ নির্ণয় করা হয় এবং (৭.৫১) নং সমীকরণে বসিয়ে স্প্রিংয়ের স্প্রিং ধ্রুবক k নির্ণয় করতে হবে।

৯। m কে X অক্ষে এবং T^2 কে Y অক্ষে বসিয়ে লেখচিত্র অঙ্কন করা হলে মূল বিন্দুগামী একটি সরল রেখা পাওয়া যায় (চিত্র-৭.১৬)। এ সরল রেখার উপর ছক কাগজের কোনো ক্ষুদ্র বর্গাকার ঘরের কৌণিক বিন্দু দিয়ে যায় এমন যেকোনো একটি বিন্দু P নিয়ে P থেকে ভুজ ও কটির উপর যথাক্রমে PM ও PN লম্ব টানা হয়। লেখচিত্র থেকে ভর m = OM এর জন্য T^2 = ON এর মান নির্ণয় করা হয় এবং (৭.৫১) নং সমীকরণে বসিয়ে স্প্রিংয়ের স্প্রিং ধ্রুবক k নির্ণয় করা হয়।



চিত্র ৭.১৬

$\frac{m}{T^2}$ নির্ণয়ের ছক

পাঠ সংখ্যা	স্প্রিংয়ে ঝুলানো ভর, m	20 দোলনের সময় t(s)				দোলনকাল $T = \frac{t}{20}$	T^2	$\frac{m}{T^2}$	গড় $\frac{m}{T^2}$
		(i)	(ii)	(iii)	গড়				
	kg					s	s^2	Nm^{-1}	Nm^{-1}
1.									
2.									
3.									
4.									
5.									

হিসাব ঃ পরীক্ষণীয় স্প্রিংয়ের স্প্রিং ধ্রুবক

(ক) $\frac{m}{T^2}$ এর গড় মান থেকে, $k = 4\pi^2 \frac{m}{T^2} =$ .... N m^{-1}

(খ) লেখচিত্র থেকে, $k = 4\pi^2 \frac{m}{T^2} =$ .... N m^{-1}

ফলাফল ঃ

(ক) $\frac{m}{T^2}$ এর গড় মান থেকে প্রাপ্ত স্প্রিংয়ের বল ধ্রুবক, $k =$ .... N m^{-1}

(খ) লেখচিত্র থেকে প্রাপ্ত স্প্রিংয়ের বল ধ্রুবক, $k =$ .... N m^{-1}

সতর্কতা ঃ

১। চাপানো ভর এমন নেয়া হলো যেন কখনোই তা স্প্রিংয়ের স্থিতিস্থাপক সীমা অতিক্রম না করে।

২। একই বিন্দু থেকে দোলনের সংখ্যা গণনা হলো যাতে T এর মান ভুল না হয়।

৩। দোলার সময় চাপানো ভরটি যাতে এদিক ওদিক দোল না খায় সেদিকে লক্ষ্য রাখা হলো।

৪। প্রত্যেক চাপানো ভরের জন্য কমপক্ষে তিনবার করে 20 দোলনের সময় নিয়ে গড় দোলনকাল নির্ণয় করা হলো।

পাঠ-৭.৭ ব্যবহারিক -৬ একটি স্প্রিংকে দোলক হিসাবে ব্যবহার করে দুটি ভরের তুলনা

Determination of the Ratio of Two Masses Using Spring as a Pendulum

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- উলম্ব স্প্রিং-এর দোলন প্রকৃতি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- উলম্ব স্প্রিং-এ চাপানো ভরের পরিবর্তনে এর পর্যায়কালের পরিবর্তন ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- উলম্ব স্প্রিং-এর উপর চাপানো ভরের পরিবর্তনে স্প্রিং-এর বিকৃতি প্রকৃতি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

তত্ত্ব: একটি স্প্রিংয়ের এক প্রান্ত কোনো দৃঢ় অবলম্বন থেকে ঝুলিয়ে অপর প্রান্তে m ভরের একটি বস্তু ঝুলিয়ে নিচের দিকে সমান্য টেনে ছেড়ে দিলে তা উপর-নীচ দুলতে থাকে। স্প্রিংটির স্প্রিং ধ্রুবক k হলে এর দোলনকাল-

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$


চিত্র-৭.২১

সুতরাং m_1 ও m_2 ভরের জন্য দোলনকাল যথাক্রমে T_1 ও T_2 হলে আমরা পাই,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \text{ ও } T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}$$

সুতরাং, $\dfrac{T_1}{T_2} = \sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}}$

বা, $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{T_1^2}{T_2^2}$

$$\therefore m_1 : m_2 = T_1^2 : T_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(৭.৫২)$$

এখন পরীক্ষার সাহায্যে বিভিন্ন ভরের জন্য দোলনকাল নির্ণয় করে (৭.৫২) নং সমীকরণের সাহায্যে তাদের ভরের তুলনা করা যায়।

যন্ত্রপাতি: দুটি নির্দিষ্ট ভরের বস্তু, স্প্রিং, থামা ঘড়ি ইত্যদি।

কাজের ধারা:

১। প্রথমে পরীক্ষাধীন স্প্রিংয়ের এক প্রান্ত কোনো দৃঢ় অবলম্বন থেকে বেঁধে ঝুলিয়ে দিয়ে অপর প্রান্তে একটি ওজন ধারক যুক্ত করতে হবে।

২। পরীক্ষার জন্য চাপানো ভরগুলো ছোট হতে হবে যেন সমস্ত ভরগুলো ওজন ধারকে চাপালেও স্প্রিংটি স্থিতিস্থাপক সীমা অতিক্রম না করে।

৩। ওজন ধারকে m_1 ভরের বস্তুটি চাপাতে হবে।

৪। এখন ভরটিকে নিচের দিকে সামান্য টেনে ছেড়ে দিলে ভরটি উপর-নীচ সরল দোলকের ন্যায় দুলতে থাকবে।

৫। ভরটি যে কোনো এক প্রান্তে এলে থামা ঘড়ি চালু করে 20টি পূর্ণ দোলনের সময় নির্ণয় করতে হবে।

৬। একই চাপানো ভরের জন্য কমপক্ষে তিনবার 20টি পূর্ণ দোলনের সময় নিয়ে তার গড় সময় নির্ণয় করতে হবে। এ গড় সময়কে 20 দিয়ে ভাগ করে m_1 ভরের জন্য দোলনকাল T_1 নির্ণয় করতে হবে।

৭। একই পদ্ধতিতে m_2 ভরের জন্য দোলনকাল T_2 নির্ণয় করতে হবে ।

৮। (৭.৫২) নং সমীকরণে T_1 ও T_2 এর মান বসিয়ে $m_1 : m_2$ নির্ণয় করতে হবে ।

ভরের অনুপাত নির্ণয়ের ছক

বস্তুর ভর,	পাঠ সংখ্যা	20 দোলনের সময় t	20 দোলনের সময়ের গড় t	দোলনকাল $T = \frac{t}{20}$	T^2	$m_1 : m_2$
kg		s	s	s	s^2	
m_1	1.				$T_1^2 =$	$T_1^2 : T_2^2$
	2.					
	3.					
m_2	1.				$T_2^2 =$	
	2.					
	3.					

হিসাব :

পরীক্ষণীয় বস্তুদ্বয়ের ভরের অনুপাত, $m_1 : m_2 = T_1^2 : T_2^2 = \ldots\ldots\ldots$

ফলাফল :

পরীক্ষণীয় বস্তুদ্বয়ের ভরের অনুপাত, $m_1 : m_2 = \ldots\ldots\ldots$

সতর্কতা :

১. এমন ভর ঝুলানো হয় যেন কখনোই তা স্প্রিংয়ের স্থিতিস্থাপক সীমা অতিক্রম না করে।

২. দোলনের সংখ্যা সঠিকভাবে গণনা হলো যাতে T এর মান ভুল না হয়।

৩. দোলার সময় ঝুলানো ভরটি যাতে এদিক ওদিক দোল না খায় সেদিকে লক্ষ্য রাখা হলো।

৪. প্রত্যেক ভরের জন্য কমপক্ষে তিনবার করে 20 দোলনের সময় নিয়ে গড় দোলনকাল নির্ণয় করা হলো।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

ক. বহু নির্বাচনি প্রশ্নঃ

১. সরল দোলন গতি সম্পন্ন কোনটি অপ্রয়োজনীয়-

ক. প্রত্যায়নী বল খ. জড়তা গ. স্থিতিস্থাপকতা ঘ. মহাকর্ষ

২. একটি সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার সরণের সাপেক্ষে বেগের দশা পার্থক্য-

ক. π খ. $\frac{\pi}{2}$ গ. 0 ঘ. $-\frac{\pi}{2}$

৩. সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার t সময়ে সরণ $y=2\sin\left(0.05t+0.09\right)$ দিয়ে প্রকাশ করা হলে কণাটির কম্পাঙ্ক কত?

ক. $2\pi\times 0.05$ খ. $\frac{0.05}{2\pi}$ গ. $2\pi\times 0.09$ ঘ. $\frac{0.09}{2\pi}$

৪. $y=5\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)$ সমীকরণটি একটি কণার সরল দোলন গতি নির্দেশ করে। এই গতির কম্পাঙ্ক হবে

ক. ω খ. $\frac{\omega}{2\pi}$ গ. $\frac{1}{\omega}$ ঘ. $\frac{2\pi}{\omega}$

৫. একটি কণার সরল দোলন গতির সমীকরণ $x=10\sin\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{12}\right)$ হলে এর আদি দশা হবে-

ক. $\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{12}$ খ. $\frac{\pi}{12}$ গ. $-\frac{\pi}{12}$ ঘ. 10

৬. সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার কম্পাংক f হলে ঐ কণার গতিশক্তির কম্পাঙ্ক-

ক. $\frac{f}{2}$ খ. f গ. $2f$ ঘ. $4f$

৭. সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণা A বিস্তারে দুলছে। কণাটির বেগ সর্বোচ্চ হবে যখন এর সরণ

ক. $x=0$ খ. $x=\frac{A}{\sqrt{2}}$ গ. $x=\frac{A}{2}$ ঘ. $x=A$

৮. সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার বিস্তার A । কোন অবস্থানে এর স্থিতিশক্তি গতিশক্তি সমান হবে?

ক. $x=0$ খ. $x=\pm\frac{A}{\sqrt{2}}$ গ. $x=\pm\frac{A}{2}$ ঘ. $x=\pm A$

৯. সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণা A বিস্তারে এবং T সেকেন্ড পর্যায় কাল নিয়ে দুলছে। $\frac{T}{8}$ সেকেন্ড পর সাম্যাবস্থান থেকে কণাটির সরণ

ক. $x=\frac{A}{2\sqrt{2}}$ খ. $x=\frac{A}{\sqrt{2}}$ গ. $x=\frac{A}{4}$ ঘ. $x=\frac{A}{2}$

১০. সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার বিস্তার 2 mm এবং সর্বোচ্চ গতিবেগ 4.4 ms^{-1} । কণাটির পর্যায় কাল

ক. 0.01 s খ. 0.1 s গ. 1 s ঘ. 10 s

১১. সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণা সমীকরণ $y=a\sin\omega t+b\cos\omega t$ হলে এর বিস্তার কত?

ক. a খ. b গ. $a+b$ ঘ. $\sqrt{a^2+b^2}$

১২. সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণা সমীকরণ $y = a + b\cos\omega t$ হলে এর বিস্তার কত?

ক. a খ. b গ. $a+b$ ঘ. $\sqrt{a^2+b^2}$

১৩. সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার সরণ যখন বিস্তারের অর্ধেক তখন তার গতিশক্তি কণার মোট শক্তির কত অংশ?

ক. $\frac{3}{4}$ খ. $\frac{3}{5}$ গ. $\frac{2}{7}$ ঘ. $\frac{2}{9}$

১৪. k বল ধ্রুবক সম্পন্ন একটি স্প্রিং-এ T টান প্রয়োগ করায় x পরিমান দৈর্ঘ্য প্রসারিত হলে সঞ্চিত স্থিতিশক্তির পরিমান-

ক. $\frac{T^2}{2K}$ খ. $\frac{T^2}{2x}$ গ. $\frac{2k}{T^2}$ ঘ. $\frac{2T^2}{K}$

১৫. সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার কম্পাঙ্ক 100 Hz হলে এর পর্যায় কাল হবে-

ক. 10^{-1} s খ. 10^{-2} s গ. 10^{-3} s ঘ. 10^{-3} s

১৬. সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার কম্পাঙ্ক 200 Hz এবং বিস্তার 0.1 cm হলে এর সর্বোচ্চ বেগ-

ক. $0.1\pi\,\text{ms}^{-1}$ খ. $0.4\pi\,\text{ms}^{-1}$ গ. $4\pi\,\text{ms}^{-1}$ ঘ. $40\pi\,\text{ms}^{-1}$

১৭. সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার বেগ সর্বোচ্চ হবে যখন সরণ -

ক. $x=0$ খ. $x=\frac{A}{\sqrt{2}}$ গ. $x=\frac{A}{2}$ ঘ. $x=A$

১৮. একটি ফাঁপা ধাতব গোলক সুতা দিয়ে ঝুঁলিয়ে একটি সরল দোলক তৈরি করা হলো। এই গোলকের মধ্যে পানি পূর্ণ করে নিচে একটি ছোট ছিদ্র করে দেয়া হলো। এই অবস্থায় অল্প বিস্তারে দুলিয়ে দিলে পর্যায় কাল কিরূপ হবে?

ক. পর্যায় কাল অপরিবর্তিত থাকবে
খ. পর্যায় কাল প্রথমে বাড়বে পরে কমবে
গ. পর্যায় কাল প্রথমে কমবে পরে বাড়বে
ঘ. পর্যায় কাল ভরের উপর নির্ভর করে না

● উদ্দীপকটি পড়ুন এবং নিচের ১৯, ২০ ও ২১ নং প্রশ্নের উত্তর দিন।

একটি L কার্যকরী দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট সরণ দোলককে লিফ্টের সিলিংয়ে ঝুলানো আছে। এর পর্যায় কাল কত হবে যখন-

১৯. যখন লিফ্টি a ত্বরণে উপরে উঠছে।

ক. $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ খ. $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}}$

গ. $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g-a}}$ ঘ. $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{\sqrt{g^2+a^2}}}$

২০. যখন লিফ্টি a ত্বরণে নিচে নামছে।

ক. $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ খ. $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}}$

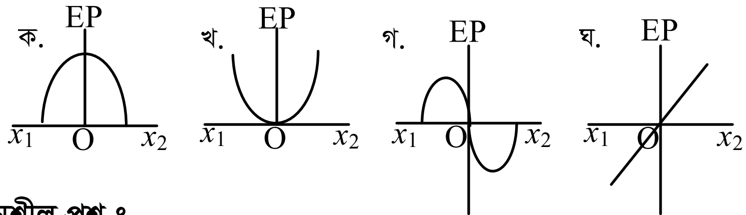
গ. $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g-a}}$ ঘ. $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{\sqrt{g^2+a^2}}}$

২১. যখন লিফ্টি সমবেগে নিচে নামছে।

ক. $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ খ. $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}}$

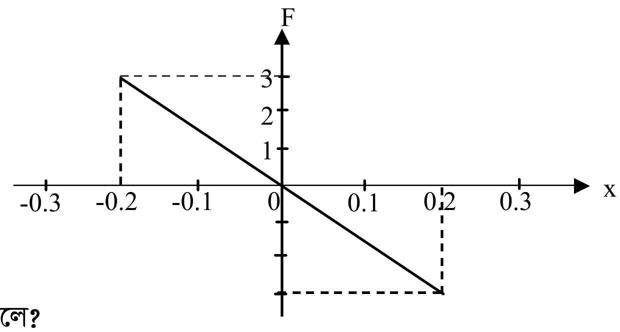
গ. $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g-a}}$ ঘ. $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{\sqrt{g^2+a^2}}}$

২২. একটি কণা x_1 ও x_2 দুটি বিন্দুর মধ্যে সরল দোলন গতি সম্পন্ন করছে। নিচের কোনটি এর গতিশক্তির লেখচিত্র?



খ. সৃজনশীল প্রশ্ন ঃ

১. 0.15kg ভরের একটি বস্তু সরল রেখা বরাবর। বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল বল এবং পূর্ণ দোলনের সরণ লেখচিত্রে দেখানো হলো।



ক. বিস্তার কাকে বলে?

খ. লেখচিত্রটি কি সরল দোলন গতি নির্দেশ করে? আপনার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দিন।

গ. লেখটি থেকে বস্তুটির কৌণিক কম্পাঙ্ক নির্ণয় করুন।

ঘ. লেখটির ঢাল থেকে বস্তুটির সর্বোচ্চ গতিশক্তি নির্ণয় করা যায় কিনা যাচাই করুন।

২. কোনো কণার 0.05 m বিস্তার এবং 3.14 s পর্যায় কাল নিয়ে $x = P\sin Qt$ সমীকরণ অনুসারে দুলছে। কণাটির বিভিন্ন অবস্থানে ত্বরণে পরীক্ষালব্ধ মান নিচে দেয়া হলো।

ত্বরণ $a\,\text{ms}^{-2}$	16	8	0	-8	16
সরণ $x\,\text{m}$	-4	-2	0	2	4

ক. সরল দোলন গতি কাকে বলে? ১

খ. ত্বরণ বনাম সরণের লেখচিত্র কিরূপ? ব্যাখ্যা করুন। ২

গ. প্রদত্ত সমীকরণের P ও Q এর মান নির্ণয় করুন। ৩

ঘ. প্রদত্ত ছক থেকে ত্বরণ বনাম সরণের লেখচিত্র অংকণ করে উদ্দীপকে প্রদত্ত পর্যায় কালে মান সঠিক হয়েছে কিনা যাচাই করুন। ৪

৩. m ভরের একটি কণা গতি সরল দোলন গতি। কণাটির সাম্যাবস্থান থেকে x_1 ও x_2 দূরে বেগ যথাক্রমে v_1 ও v_2 ।

ক. আদি দশা বলতে কি বুঝায়? ১

খ. "সব সরল দোলন গতিই পর্যাবৃত্ত গতি, কিন্তু সব পর্যাবৃত্ত গতি সরল দোলন গতি নয়"। উক্তিটি ব্যাখ্যা করুন। ২

গ. কণাটির পর্যায় কাল নির্ণয় করুন। ৩

ঘ. প্রদত্ত উপাত্ত থেকে আপনি কিভাবে কণাটির মোট শক্তি নির্ণয় করবেন তা গাণিতিক ভাবে বিশ্লেষণ করুন। ৪

৪. m ভরের একটি বস্তুকে নগন্য ভরের একটি স্প্রিংয়ের সাথে ঝুলিয়ে দিলে 2 s পর্যায় কাল বিশিষ্ট সরল দোলন গতিতে দুলতে থাকে। এর ভর 2 kg বৃদ্ধি করলে পর্যায় কাল 1 s বৃদ্ধি পায়।

ক. পর্যায় কাল কাকে বলে? ১

খ. সরল দোলন গতি সম্পন্ন কোনো কণার যে অবস্থানে গতিশক্তি সর্বোচ্চ সে অবস্থানে স্থিতিশক্তি সর্বনিম্ন হয় কেন ব্যাখ্যা করুন। ২

গ. m ভরের মান নির্ণয় করুন। ৩

ঘ. ভরের পরিবর্তনের ফলে বস্তুটির মোট শক্তির কিরূপ পরিবর্তন ঘটবে তা গাণিতিক ভাবে বিশ্লেষণ করুন। ৪

৫. পৃথিবীর বিষুব অঞ্চল ও মেরু অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বরণ যথাক্রমে $9.78\ ms^{-2}$ এবং $9.83\ ms^{-2}$। একজন ছাত্র পরীক্ষণের জন্য একটি সরল দোলক ও একটি স্প্রিং দোলক নিয়ে বিষুব অঞ্চল থেকে মেরু অঞ্চলে গেল। বিষুব অঞ্চলে উভয় দোলকের পর্যায় কাল 2 সেকেন্ড। ভরহীন স্প্রিং-এর দৈর্ঘ্য 30 cm এবং এর সাথে 0.1 kg ভর যুক্ত করা হয়েছে। ভর যুক্ত অবস্থায় বিষুব অঞ্চলে এর দৈর্ঘ্য হয় 39.78 cm এবং মেরু অঞ্চলে 39.83 cm। তাদের প্রাপ্ত পরীক্ষণে দেখা গেল যে স্প্রিং দোলকের পর্যায়কাল অপরিবর্তিত আছে এবং সরল দোলকের পর্যায়কাল পরিবর্তিত হয়েছে।

ক. সেকেন্ড দোলক কাকে বলে? ১

খ. একটি সেকেন্ড স্প্রিং দোলকের ক্ষেত্রে $\frac{k}{m}=\pi^2$ ব্যাখ্যা করুন। ২

গ. সরল দোলকের দৈর্ঘ্য কতটুকু পরিবর্তন করলে মেরু অঞ্চলে আবার সেকেন্ড দোলকের মত আচরণ করবে বের করুন। ৩

ঘ. স্প্রিং দোলকের পর্যায়কাল অপরিবর্তিত থাকার এবং দৈর্ঘ্য পরিবর্তনের কারণ যুক্তি সহ বিশ্লেষণ করুন। ৪

গ. সংক্ষিপ্ত উত্তর প্রশ্ন ঃ

১. কোনো সরল দোলন গতির দোলনকাল 2 s, কম্পাঙ্ক কত, লিখুন।
২. কোনো সরল দোলন গতির কম্পাঙ্ক 200 Hz হলে দোলনকাল কত, লিখুন।
৩. দশা শব্দ দিয়ে কি বোঝানো হয়, লিখুন।
৪. কম্পন ও কম্পাঙ্কের মধ্যে পার্থক্য কি, লিখুন।
৫. চাঁদ পৃথিবীর চারিদিকে আবর্তন করছে। এই গতি সরল দোলন গতি কি না ব্যাখ্যা করুন।
৬. $F=-kx$ সমীকরণে ঋণাত্মক চিহ্নের কারণ ব্যাখ্যা করুন।
৭. $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ সমীকরণের প্রতিটি রাশি ব্যাখ্যা করুন।
৮. কণার বেগ, $v=\omega\sqrt{A^2-x^2}$ সমীকরণ দিয়ে প্রকাশ করা হলে প্রমাণ করুন যে কণাটির গতি সরল দোলন গতি।
৯. একটি সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার সময়-সরণ লেখ অঙ্কন করুন।
১০. একটি সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার বিস্তার A কণার গতি পথের কোন কোন বিন্দুতে বেগ,ও ত্বরণ সর্বাধিক? আপনার উত্তর ব্যাখ্যা করুন।
১১. একটি সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার বিস্তার A এবং কম্পাঙ্ক f । কণার গতি পথের সাম্য বিন্দু থেকে $\frac{A}{2}$ দূরে কত বেগ হবে নির্ণয় করুন।
১২. একটি সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণা তার সাম্য বিন্দু থেকে শেষ প্রান্তে বিন্দুর দিকে যাবার সময় এবং শেষ বিন্দু থেকে সাম্য বিন্দুতে আসার সময় বেগ ও ত্বরণের অভিমুখ কিরূপ থাকে আলোচনা করুন।
১৩. দেখান যে. সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার শক্তি সংরক্ষিত হয়।

ঘ. বিশদ উত্তর প্রশ্ন ঃ

১. কোন কোন শর্তে সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তির সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায় লিখুন।
২. সরল দোলন গতি সম্পন্ন কণার সময় বনাম শক্তি লেখচিত্র অংকণ করে দেখান যে, সাম্য বিন্দু থেকে $\frac{A}{\sqrt{2}}$ দূরে স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তি সমান হয় এবং গাণিতিক ভাবে তা বিশ্লষণ করুন।
৩. দেখান যে, উলম্ব স্পিং এর গতি সরল দোলন গতি।
৪. উলম্ব স্পিং-এর পর্যায় কাল, $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ । যদি স্পিং-এর মুক্ত প্রান্তে m kg ভর চাপালে স্পিংটি l cm প্রসারিত হয় তবে প্রমাণ করুন যে, উলম্ব স্পিং-এর পর্যায় কাল, $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ দিয়ে প্রকাশ করা যায়।

৫. একটি সরল দোলকের পর্যায় কালের সমীকরণ $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ হলে দোলকটির কম্পঙ্কের সমীকরণ কিরূপ হবে?

৬. একটি সরল দোলক এবং একটি স্প্রিং দোলকের পর্যায় কাল 2 s। পৃথিবীর কেন্দ্রে নিয়ে গেলে এদের পর্যায় কাল কিরূপ হবে? আপনার উত্তর ব্যাখ্যা করুন।

৭. পৃথিবীর একটি ব্যাস বরাবর একটি কাল্পনিক সুড়ঙ্গে কোনো বস্তুকে ফেলা হলে তার গতি কীরকম হবে, লিখুন।

৮. একটি দোলক ঘড়িকে নিরক্ষীয় অঞ্চল থেকে মেরু অঞ্চলে নিয়ে গেলে ঘড়িটি স্লো যাবে না ফাস্ট যাবে তা আলোচনা করুন।

৯. একটি বিলিয়ার্ড বল মসৃণ বিলিয়ার্ড টেবিলের এক ধারে লম্বাভাবে আঘাত করল এবং প্রতিক্ষিপ্ত হয়ে ফিরে টেবিলের বিপরীত দিকের ধারে এসে আঘাত করল। এভাবে বিলিয়ার্ড বলটি পুনঃপুনঃ প্রতিক্ষিপ্ত হয়ে একবার এপাশে এবং একবার ওপাশে যাতায়াত করতে লাগল। বলটি কি সরল দোলগতি নিষ্পন্ন করছে, লিখুন।

১০. একটি স্প্রিং এর সঙ্গে আবদ্ধ একটি বস্তু সরল দোলগতিতে দুলছে। স্প্রিং ধ্রুবকটি বাড়িয়ে দেওয়া হলে কম্পাঙ্কের কোনো পরিবর্তন হবে কি ? আপনার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দিন।

১১. একই স্প্রিং ধ্রুবক বিশিষ্ট দুটি স্প্রিং-এর মুক্ত প্রান্তে m_1 এবং m_2 ভর ঝোলানো হলে এদের কম্পাঙ্কের অনুপাত কত হবে বের করুন।

ঙ. গাণিতিক সমস্যা ঃ

১. সরলরেখা বরাবর ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দিত একটি কণার বিস্তার 5 cm এবং পর্যায়কাল 20 s। এর সর্বোচ্চ দ্রুতি ও ত্বরণ নিণয় করুন।।

২. সরল ছন্দিত গতিতে চলমান একটি বস্তুর বিস্তার 2 cm এবং কম্পাঙ্ক 20 Hz। বস্তুটির 0.05 m সরণে বেগ কত?

৩. সরল দোলন গতি সম্পন্ন একটি কণার গতির সমীকরণ $y = 100\sin(\omega t + \delta)$, পর্যায়কাল 20 s এবং আদি সরণ 0.05 m হলে কণাটির (i) কৌণিক কম্পাঙ্ক (ii) আদি দশা নির্ণয় করুন।

৪. সরল দোলন গতি সম্পন্ন একটি কণার গতির সমীকরণ, $x = 20\sin\left(31t - \frac{\pi}{6}\right)$। সকল রাশি SI পদ্ধতিতে পরিমাপ করা হয়েছে। এই দোলনগতির (i) বিস্তার, (ii) কম্পাঙ্ক, (iii) কৌণিক কম্পাঙ্ক, (vi) পর্যায়কাল, (v) সর্বোচ্চ বেগ, (vi) সর্বোচ্চ ত্বরণ ও (vii) আদি দশা নির্ণয় করুন।

৫. সরল দোলন গতি সম্পন্ন একটি কণার গতির সমীকরণ, $x = 12\sin\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{4}\right)$। সকল রাশি SI পদ্ধতিতে পরিমাপ করা হয়েছে। কণাটির (i) বিস্তার, (ii) কম্পাঙ্ক, (iii) আদি দশা ও (iv) যাত্র শুরুর 1.25 s পরে বেগ নির্ণয় করুন।

৬. কোনো স্প্রিং এর এক প্রান্তে m ভরের একটি বস্তু ঝুলালে এটি 8 cm প্রসারিত হয়। বস্তুটিকে এরপর একটু টেনে ছেড়ে দিলে এর পর্যায়কাল কত হবে?

৭. 100 g ভরের একটি বস্তুকে একটি স্প্রিং এর এক প্রান্তে সংযুক্ত করে ঘর্ষণবিহীন টেবিলের উপর রেখে 5 N বল প্রয়োগ করায় স্প্রিংটি 0.2 m প্রসারিত হয়। স্প্রিংটির স্প্রিং ধ্রুবক, দোলনকাল ও কম্পাঙ্ক নির্ণয় করুন।

৮. 1 m কার্যকরী দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি সরল দোলক প্রতি সেকেন্ডে 2 টি দোলন সম্পন্ন করে। অভিকর্ষজ ত্বরণের মান নির্ণয় করুন।

৯. যেখানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 9.8 ms^{-2}, সেখানে একটি সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য কত?

১০. কোনো স্থানে দুটি সরল দোলকের দোলনকালের অনুপাত 3:2 হলে, এদের দৈর্ঘ্যের তুলনা করুন।

১১. কোনো সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য 2.25 গুণ বাড়ালে এর দোলনকাল কত হবে?

১২. পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে একটি সেকেন্ড দোলককে চাঁদে নিয়ে গেলে দোলনকাল কত হবে? পৃথিবীর ভর ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে চাঁদের ভর ও ব্যাসার্ধের 81 গুণ ও 4 গুণ।

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.১ ঃ ১। (ঘ) ২। (খ) ৩। (ঘ) ৪। (গ)

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.২ ঃ ১। (ক) ২। (গ) ৩। (ঘ)

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.৩ ঃ ১। (গ) ২। (খ) ৩। (খ) ৪। (ঘ) ৫। (ক)

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.৪ ঃ ১। (ক) ২। (ঘ) ৩। (গ)

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.৫ ঃ ১। (ক) ২। (গ) ৩। (খ) ৪। (খ) ৫। (গ) ৬। (ঘ)
৭। (ঘ) ৮। (ক) ৯। (খ) ১০। (গ)

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

ক. সাধারণ বহুনির্বাচনী প্রশ্ন ঃ ১। (ঘ) ২। (খ) ৩। (খ) ৪। (খ) ৫। (গ) ৬। (গ)
৭। (ক) ৮। (গ) ৯। (খ) ১০। (ক) ১১। (ঘ) ১২। (গ)
১৩। (ক) ১৪। (ঘ) ১৫। (খ) ১৬। (খ) ১৭। (ক) ১৮। (খ)
১৯। (খ) ২০। (গ) ২১। (ক) ২২। (খ)

খ. সৃজনশীল প্রশ্ন ঃ-১ নিজে করুন। টিউটরের সহায়তা নিন।
সৃজনশীল প্রশ্ন ঃ-২ নিজে করুন। টিউটরের সহায়তা নিন।
সৃজনশীল প্রশ্ন ঃ-৩ নিজে করুন। টিউটরের সহায়তা নিন।
সৃজনশীল প্রশ্ন ঃ-৪ নিজে করুন। টিউটরের সহায়তা নিন।
সৃজনশীল প্রশ্ন ঃ-৫ নিজে করুন। টিউটরের সহায়তা নিন।

ঙ. গাণিতিক সমস্যা ঃ ১। 0.0157 ms^{-1}; 0.00493 ms^{-2} ২। 24.32 ms^{-1}
৩। 0.21 $rads^{-1}$; 9.12×10^{-3} deg ৪। (i) 20 m; (ii) 5 Hz;
(iii) 31 $rads^{-1}$; (iv) 0.2 s; (v) 620 ms^{-1}; (vi) 19.22 ms^{-2} (vii) -30°
৫। (i) 12 m; (ii) 0.1 Hz; (iii) $\frac{\pi}{4}$ $rads^{-1}$; (iv) 0 ৬। 0.57 s
৭। 25 Nm^{-1}; 0.3975 s; 2.52 Hz ৮। 157.92 ms^{-2}
৯। 99.29 cm ১০। 9:4
১১। 3.6 s ১২। 4.5 s