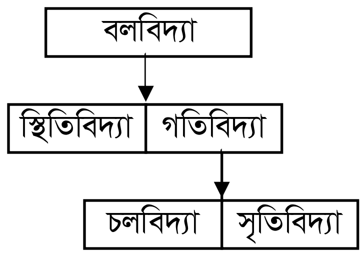
গতিবিদ্যা
Dynamics

ইউনিট
২

ভূমিকা (Introduction)

আমাদের চারপাশের দৃশ্যমান বিভিন্ন বস্তুর কোনোটি স্থির আবার কোনোটি গতিশীল। বস্তুর গতি বিষয়ে আলোচনা করতে হলে প্রথমেই জানা দরকার বলবিদ্যা সম্পর্কে। বলবিদ্যা পদার্থবিজ্ঞানের একটি গুরুত্বপূর্ণ শাখা, টেবিল আকারে লিখলে পাই



বলবিদ্যা : বিজ্ঞানের যে শাখায় বস্তু এবং বলের ক্রিয়া প্রতিক্রিয়া আলোচনা করা হয়, তাকে বলবিদ্যা বলে।

স্থিতিবিদ্যা : বলবিদ্যার যে শাখায় স্থিতিশীল বস্তুর উপর বলের ক্রিয়া আলোচনা করা হয় তাকে স্থিতিবিদ্যা বলে।

গতিবিদ্যা : বলবিদ্যার যে শাখায় গতিশীল বস্তুর উপর বলের ক্রিয়ার আলোচনা করা হয় তাকে গতিবিদ্যা বলে।

সৃতিবিদ্যা : গতিবিদ্যার যে শাখায় বলের ক্রিয়া অনুসন্ধান না করে শুধুমাত্র গতি সম্পর্কে আলোচনা করা হয় তাকে সৃতিবিদ্যা বলে।

চলবিদ্যা : গতিবিদ্যার যে শাখায় বল ও গতির পারস্পরিক সম্পর্ক নিয়ে আলোচনা করা হয় তাকে চলবিদ্যা বলে।

এই অধ্যায়ে গতিবিষয়ক বিভিন্ন রাশি তাদের মধ্যকার পারস্পারিক সম্পর্ক, জড় কাঠামো, প্রাস ও সুষম বৃত্তীয় গতি আলোচনা করা হবে।

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ-২.১ প্রসঙ্গ কাঠামো
Reference Frame

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

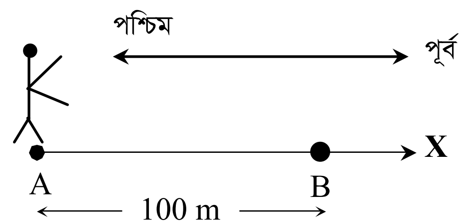
- প্রসঙ্গ কাঠামো বর্ণনা করতে পারবেন।
- জড় প্রসঙ্গ কাঠামোর ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- পরম স্থিতি, পরম গতি ও আপেক্ষিক গতি বর্ণনা করতে পারবেন।

২.১.১ প্রসঙ্গ কাঠামো:

আমরা দৈনন্দিন জীবনের কোনো ঘটনার বর্ণনা বা কোনো বস্তুর স্থিতি বা গতি আলোচনা করতে গিয়ে প্রথমেই স্থানকে বিবেচনা করে থাকি। কোনো স্থানকে নির্দিষ্ট করেই কোনো ঘটনার সঠিক বর্ণনা দেয়া সম্ভব। যার সাপেক্ষে এই স্থিতি বা গতি বর্ণনা করা হয় তাকে নির্দেশক ফ্রেম বা প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।

আপনারা জানেন ঢাকা থেকে বিভিন্ন জেলার দূরত্ব বিভিন্ন। ঢাকা একটি বিস্তৃত শহর। ঢাকা বলতে অনেকের কাছে ফার্মগেট, মহাখালী, গাবতলী, যাত্রাবাড়ী ইত্যাদি এলাকা বুঝে থাকেন। কিন্তু ঢাকায় একটি নির্দিষ্ট স্থান আছে (যা জিরো পয়েন্ট বা নূর হোসেন স্কয়ার হিসেবে সবার কাছে পরিচিত) সেখান থেকে বিভিন্ন জেলার দূরত্ব পরিমাপ করা হয়েছে। তাই এই স্থানটিকে প্রসঙ্গ বিন্দু হিসেবে বিবেচনা করা হয়েছে।

আমরা মাঠে 100 m দৌড়ের কথা বিবেচনা করি, একজন দৌড়বিদের গতি বর্ণনার জন্য একটি প্রসঙ্গ বিন্দু বিবেচনা করা প্রয়োজন। চিত্রের মাঠে A বিন্দু হতে যদি তিনি দৌড় শুরু করেন তাহলে A বিন্দুকে আমরা প্রসঙ্গ বিন্দু বা মূলবিন্দু বলব। তিনি একটি নির্দিষ্ট দিকে সরলরেখা বরাবর AB পথে দৌড় সম্পন্ন করেন। যে কোনো সময়ে তার অবস্থান বর্ণনা করতে হলে মূল বিন্দুর সাপেক্ষে একটি মাত্র সরলরেখা দ্বারাই সম্ভব।

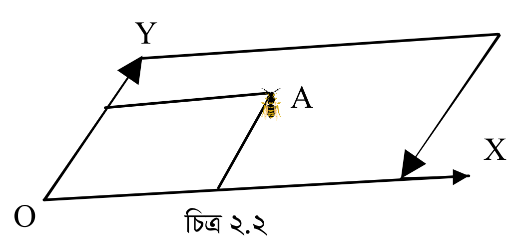


চিত্র- ২.১

একমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো (One Dimensional Reference Frame): কোনো কণা বা বস্তুর ক্ষেত্রেও একটি নির্দিষ্ট রেখা বরাবর চলতে থাকলে সব সময়ই তার অবস্থান ঐ সরলরেখায় থাকবে, যা মূল বিন্দু সাপেক্ষে নির্ণয় করা সম্ভব। এই সরলরেখাকে X-অক্ষ ধরলে এবং এর উপর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু A-কে মূল বিন্দু ধরলে তাকে আমরা এক মাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামে বলি (চিত্র-২.১) এক মাত্রিক গতির ক্ষেত্রে যে সরলরেখা বরাবর বিবেচ্য বস্তুটি গতিশীল সেই রেখার একটি বিন্দুকে মূল বিন্দু (A) এবং একটি দিককে ধনাত্মক ধরে নিতে হয়। এর পর এই প্রসঙ্গ রেখার সংগে বা সাপেক্ষে যাবতীয় হিসাব পরিগণন করতে হয়। চিত্র ২.১ দৌড়বিদের ডানদিকে বা পূর্বদিকের গতি ধনাত্মক কিন্তু বামদিকে বা পশ্চিমদিকে গেলে ঋণাত্মক ধরা হবে।

মুক্তভাবে পড়ন্ত একটি বস্তুর বিভিন্ন সময়ের অবস্থান এ ধরনের একটি প্রসঙ্গ কাঠামো দ্বারা নির্ণয় করা যায়। যে বিন্দু থেকে বস্তুটি ছেড়ে দেয়া হয় তাকে প্রসঙ্গ বিন্দু ধরা যেতে পারে।

দ্বিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো (Two Dimensional Reference Frame): ধরুন একটি ঘরের মেঝের উপর একটি পিঁপড়া হেঁটে বেড়াচ্ছে। পিঁপড়ার যে কোনো সময়ের অবস্থান বের করতে হলে একমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামোর সাহায্যে সম্ভব নয়। তাহলে কীভাবে সম্ভব? পিঁপড়ার অবস্থান নির্ণয়ের জন্য ঘরের মেঝের যে কোনো একটি কোণকে (দুই দেয়ালের



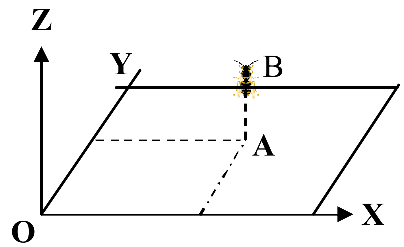
চিত্র ২.২

তল যে বিন্দুতে মিলছে) প্রসঙ্গ বিন্দু ধরে নিয়ে দৈর্ঘ্য বরাবর X অক্ষ এবং তার লম্ব দিকে প্রস্থ বরাবর Y অক্ষ অংকন করুন। পিঁপড়াটির যে কোনো সময়ে অবস্থান নির্ণয় করতে হলে ঐ সময়ে পিঁপড়াটির অবস্থান থেকে X অক্ষ এবং Y-অক্ষের উপর দুটি লম্ব টানুন (চিত্র-২.২) সুতরাং গতিশীল কোনো বস্তুর যে কোনো সময়ের অবস্থান দুটি মাত্র দূরত্বের সাহায্যে বর্ণনা করা যায়। এ ধরনের প্রসঙ্গ কাঠামোকে দ্বিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।

ত্রিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো (Three dimensional Reference Frame):

দ্বিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামোতে বর্ণিত পিঁপড়ার স্থলে একটি মাছি বিবেচনা করুন। যদি মাছিটি হেঁটে বেড়ায় তাহলে তার গতি দ্বিমাত্রিক। কিন্তু যদি মাছিটি উড়ে যায় (চিত্র ২.৩), তবে এক্ষেত্রে মাছির অবস্থান দ্বিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামোর সাহায্যে নির্ণয় সম্ভব নয়। এখানে X অক্ষ ও Y অক্ষের ছেদ বিন্দুতে উভয় রেখার সাথে অর্থাৎ XY তলের সাথে লম্বভাবে আরো একটি অক্ষ Z অক্ষ অংকন করুন।

ধরুন মাছিটি মেঝেতে হাঁটাচলা করছিল। তখন তার অবস্থান A বিন্দুতে। এরপর উড়তে থাকলো। উড়ন্ত অবস্থায় অবস্থান (B) মেঝে হতে তার অবস্থানের লম্ব (AB) টানুন। A থেকে X অক্ষ ও Y অক্ষের উপর দুটি লম্ব টানুন। তাহলে দেখা যাচ্ছে যে, মাছির গতির যে কোনো সময়ের অবস্থান বর্ণনা করতে তিনটি দূরত্বের প্রয়োজন হচ্ছে। একে ত্রিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।



চিত্র : ২.৩

২.১.২ জড় প্রসঙ্গ কাঠামো (Inertial Reference Frame):

পরস্পরের সাপেক্ষে ধ্রুব বেগে গতিশীল যে সকল প্রসঙ্গ কাঠামোতে নিউটনের গতি সূত্র ব্যাখ্যা করা যায় তাদেরকে জড় প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।

ধরা যাক, একটি স্থির বাসের মেঝেতে একটি মার্বেল স্থির অবস্থায় রাখা হলো। এর পর মার্বেলের উপর আর কোনো বাহ্যিক বল ক্রিয়াশীল না হলে মার্বেলটি বাসের সাপেক্ষে স্থির থাকবে। একইভাবে সমবেগে গতিশীল কোনো বাসে একটি মার্বেলকে স্থির অবস্থায় রাখা হলে এটিও বাসের সাপেক্ষে স্থির থাকবে। এক্ষেত্রে বাসটিকে জড় প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।

অজড় প্রসঙ্গ কাঠামো (Non-inertial Reference Frame):

ত্বরণে গতিশীল কোনো প্রসঙ্গ কাঠামোকে অজড় প্রসঙ্গ কাঠামো বলে। অজড় প্রসঙ্গ কাঠামোতে নিউটনের কোনো সূত্রই প্রযোজ্য নয়।

ধরা যাক একটি ট্রেনের মেঝেতে একটি মার্বেল স্থির অবস্থায় রাখা হলো। ট্রেনের বেগ বৃদ্ধি বা হ্রাস বা বৃত্তাকার পথে ঘোরার সময় মার্বেলটি ট্রেনের সাপেক্ষে স্থির থাকতে পারে না, বাহ্যিক বল প্রয়োগ ব্যতিত তার স্থিতি অবস্থা ক্ষুণ্ন হয়। যা নিউটনের গতিসূত্রের পরিপন্থি। এরূপ প্রসঙ্গ কাঠামোকে অজড় প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।

কাজ : জড় প্রসঙ্গ কাঠামো এবং অজড় প্রসঙ্গ কাঠামোর মধ্যে পার্থক্য লিখুন।

২.১.৩ স্থিতি ও গতি (Rest and Motion):

আপনারা আপনাদের চারপাশের বিভিন্ন বস্তুকে গতির বিভিন্ন অবস্থায় দেখতে পান। গাড়ি, রিক্সা, পাখি ইত্যাদিকে গতিশীল অবস্থায় দেখতে পান তেমনি গাছপালা বাড়ীঘর লাইটপোস্ট ইত্যাদি, স্থির দেখতে পান। সুতরাং সময়ের পরিবর্তনের সাথে পারিপার্শ্বিকের সাপেক্ষে যখন কোনো বস্তুর অবস্থানের পরিবর্তন ঘটে না তখন ঐ বস্তুটিকে স্থিতিশীল বা স্থির বস্তু বলে এবং অবস্থান অপরিবর্তিত থাকার এই ঘটনাকে বলে স্থিতি। যেমন গাছপালা, বাড়িঘর ইত্যাদি।

আবার গাড়ী, পাখির অবস্থান সময়ের সাথে ক্রমাগত পরিবর্তিত হচ্ছে। তাই বলা যায় সময়ের পরিবর্তনের সাথে পারিপার্শ্বিকের সাপেক্ষে যখন কোনো বস্তুর অবস্থানের পরিবর্তন ঘটে তখন তাকে গতিশীল বলে। অবস্থানের এ পরিবর্তনের ঘটনাকে গতি বলে।

পরমস্থিতি ও পরমগতি (Absolute Rest and Absolute Motion):

পূর্বের আলোচনা হতে আপনারা প্রসঙ্গ কাঠামো, স্থিতি ও গতি সম্পর্কে জানতে পেরেছেন। কোনো বস্তু প্রকৃত পক্ষে স্থির না গতিশীল তা নির্ভর করে প্রসঙ্গ কাঠামোর উপর। প্রসঙ্গ কাঠামো যদি প্রকৃতপক্ষে স্থির হয় তবে তার সাপেক্ষে যে বস্তু স্থিতিশীল রয়েছে তাও প্রকৃত পক্ষে স্থির। এ ধরনের স্থিতিকে পরম স্থিতি বলতে পারেন। আবার পরম স্থিতিশীল প্রসঙ্গ কাঠামোর সাপেক্ষে কোনো বস্তুর গতিকে পরম গতি বলা যায়। কিন্তু আপনারা জানেন এ মহাবিশ্বের কোনো বস্তুই স্থির নয় তাই পরম স্থিতিশীল প্রসঙ্গ কাঠামো পাওয়া সম্ভব নয়। কারণ পৃথিবী মূলত সূর্যকে কেন্দ্র করে ঘূর্ণনরত, আবার মহাকাশের অন্যান্য নক্ষত্রের সাপেক্ষে সূর্যও গতিশীল। তাই আপনারা যখন কোনো বস্তুকে স্থিতিশীল বা গতিশীল বলেন তা কোনো আপাত স্থিতিশীল বস্তুর সাপেক্ষে বলতে পারেন। সুতরাং বলতে পারেন মহাবিশ্বের কোনো বস্তুই পরম স্থির বা পরম গতি সম্পন্ন নয়।

আপেক্ষিক গতি (Relative Motion):

একটি গতিশীল বস্তুর সাপেক্ষে অপর একটি গতিশীল বস্তুর গতিকে আপেক্ষিক গতি বলা হয়। যেমন- চলন্ত ট্রেনের একজন যাত্রীর কাছে ট্রেনের দরজা জানালা স্থির কিন্তু প্লাটফরমে দাঁড়িয়ে থাকা একজন লোক ট্রেনের যাত্রীসহ সবকিছুই গতিশীল দেখতে পারেন।

আপনারা লক্ষ্য করে থাকবেন দুটি ট্রেন পরস্পর বিপরীত দিকে একে অন্যকে অতিক্রম করলে, যাত্রীর কাছে মনে হয় ট্রেনটির বেগ কমে গেছে। আসলে আমরা একটি ট্রেনের সাপেক্ষে অপর ট্রেনের বেগ পরিমাপ করি বলেই এমন মনে হয়। আপেক্ষিক বেগ পরিমাপ করার সময় যে বস্তুর সাপেক্ষে অন্য বস্তুর বেগ পরিমাপ করা হয় তার বেগ যে বস্তুর বেগ পরিমাপ করছি তা থেকে বিয়োগ করতে হয়।

কাজঃ পরম স্থিতি ও পরমগতি বলে কিছু নেই, সকল গতিই আপেক্ষিক -ব্যাখ্যা করুন

সার-সংক্ষেপ :

- **স্থিতি:** সময়ের প্রেক্ষিতে এবং পারিপার্শ্বিক বস্তুর সাপেক্ষে যদি কোনো বস্তু তার অবস্থানের পরিবর্তন না ঘটায় তবে তার অবস্থাকে স্থিতি বলে।
- **গতি:** সময়ের প্রেক্ষিতে এবং পারিপার্শ্বিক বস্তুর সাপেক্ষে যদি কোনো বস্তু তার অবস্থানের পরিবর্তন ঘটায় তবে তার অবস্থাকে গতি বলে।
- **প্রসঙ্গ কাঠামো:** যে দৃঢ় বস্তু বা বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো স্থানে অন্য বিন্দু বা বস্তুকে নির্দিষ্ট করা হয়, তাকে প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.১

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরটিতে (√) টিক চিহ্ন দিন।

১. দ্বিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামোতে কয়টি অক্ষ থাকে?
ক. একটি খ. দুটি গ. তিনটি ঘ. অসংখ্যা

২. কোনটি সম্ভব নয়?
ক. আপেক্ষিক গতি খ. ত্রিমাত্রিক গতি গ. পরম গতি ঘ. মহাকর্ষীয় গতি

৩. প্রসঙ্গ কাঠামো কত প্রকার
ক. ৩ খ. ৪ গ. ২ ঘ. ১

৪. টেবিলের উপর সঞ্চারমান একটি মার্বেল কোন ধরণের স্থানে বিচরণ করে?
ক. একমাত্রিক খ. দ্বিমাত্রিক গ. ত্রিমাত্রিক ঘ. চতুর্মাত্রিক

৫. কোনো প্রসঙ্গ কাঠামোর সাপেক্ষে বস্তুর গতিকে বলে-
ক. স্থিতি খ. গতি গ. আপেক্ষিক স্থিতি ঘ. আপেক্ষিক গতি

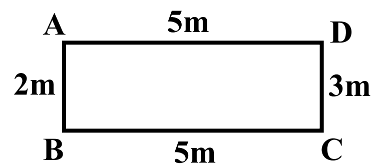
পাঠ-২.২ গতি সংক্রান্ত বিভিন্ন রাশি
Different Quantities relating Motion

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সরণ, দ্রুতি ও বেগের সংজ্ঞা দিতে পারবেন, ব্যবকলন রূপ প্রকাশ করতে পারবেন।
- ব্যবকলনের প্রাথমিক ধারণা ব্যবহার করে গতি সংক্রান্ত বিভিন্ন রাশি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

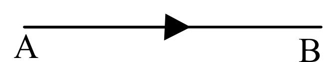
২.২.১ দূরত্ব (Distance) :
কোনো গতিশীল বস্তুর অবস্থানের পরিবর্তনের মধ্যবর্তী পথ বা দৈর্ঘ্যকে দূরত্ব বলে।



চিত্র- ২.৪

মনে করুন একটি বস্তু A অবস্থান থেকে D অবস্থানে গেলো। ২.৪ চিত্রে বস্তুটি A হতে D বিন্দুতে যেতে দুটি পথ দেখানো হচ্ছে। প্রথম পথটি সরাসরি A থেকে D বিন্দুতে এবং দ্বিতীয় পথে ABCD পথে। প্রথম ক্ষেত্রে দূরত্ব 5m এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে দূরত্ব $2 + 5 + 3 = 10$ m। দূরত্ব একটি স্কেলার রাশি। এর একক এস আই পদ্ধতিতে m এবং মাত্রা L

সরণ (Displacement):
কোনো নির্দিষ্ট দিকে সরল পথে কোনো বস্তু যে দূরত্ব বা পথ অতিক্রম করে তাকে সরণ বলে। সরণ একটি ভেক্টর রাশি। কোনো গতিশীল বস্তুর অবস্থান পরিবর্তন একটি নির্দিষ্ট দিকে হলে সরণ ঘটে। বস্তুটির আদি অবস্থান ও শেষ অবস্থানকে একটি সরল রেখা দ্বারা যুক্ত করলে এবং দিক চিহ্ন দিলে ঐ সরল রেখা 'সরণ' সূচিত করে। চিত্র-২.৫ AB সরণ নির্দেশ করে।



চিত্র-২.৫

বেগ (Velocity) : সময়ের সাথে কোনো বস্তুর সরণের হারকে বেগ বলে।

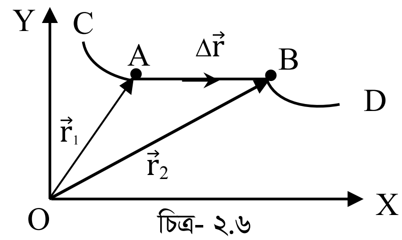
গড় বেগ (Average Velocily): যেকোনো সময় ব্যবধানে বস্তুর গড়ে প্রতি একক সময়ে যে সরণ হয় তাকে বস্তুটির গড় বেগ বলে। যেকোনো সময় ব্যবধানে কোনো বস্তুর মোট সরণকে ঐ সময় ব্যবধান দ্বারা ভাগ করে গড় বেগ নির্ণয় করা হয়।

মনে করি Δt সময় ব্যবধানে একটি বস্তুর মোট সরণ $\Delta \vec{r}$

$$\therefore \text{ গড় বেগ, } \overline{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

তাৎক্ষণিক বেগ (Instantaneous Velocity): বস্তু কণার কোনো বিশেষ মুহূর্তের বেগকে তাৎক্ষণিক বেগ বলা হয়ে থাকে। কোনো বস্তুর তাৎক্ষণিক বেগ নির্ণয় করতে হলে সময় ব্যবধান অবশ্যই অত্যন্ত ক্ষুদ্র (প্রায় শূন্যের কাছাকাছি) হতে হবে। আপনারা চোখের পাতা প্রকৃতিগতভাবে মনের অজান্তে কখনও খুলেন বা বন্ধ করেন। এই খোলা বা বন্ধ করা মুহূর্তে আপনাদের কি মনে হয় যে চোখের পাতা বন্ধ বা খোলার জন্য আপনারা প্রকৃতির কোনো কিছু দেখা থেকে বঞ্চিত হয়েছেন। উত্তরে বলবেন অবশ্যই না। এখানে চোখের পাতা বন্ধ বা খুলতে যে সময় ব্যবধান হয় তাকে অত্যন্ত ক্ষুদ্র বা শূন্যের কাছাকাছি ধরা যেতে পারে। গাণিতিকভাবে $\Delta t \rightarrow 0$ দ্বারা সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি বুঝায়। অর্থাৎ সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সাথে কোনো বস্তুর সরণের হারকে তাৎক্ষণিক বেগ বলে।

ব্যাখ্যা : ২.৬ চিত্রে একটি কণার গতি পথ দেখানো হয়েছে। A বিন্দুতে এর তাৎক্ষণিক বেগ নির্ণয় করতে হবে।



চিত্র- ২.৬

ধরা যাক, t সময়ে কণাটির অবস্থান A বিন্দুতে এবং এর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}_1$ এবং $t + \Delta t$ সময়ে কণাটির অবস্থান B বিন্দুতে এবং এর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$

$\therefore$ Δt সময় ব্যবধানে কণাটির সরণ $= \Delta\vec{r}$

কণাটির গড় বেগ $= \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$।

$\Delta t = 0$ হয় তবে $\Delta\vec{r} = 0$ হবে অর্থাৎ কোনো সরণ হয়নি। Δt যত ক্ষুদ্র হবে $\Delta\vec{r}$ ততই ক্ষুদ্র হবে। Δt যদি শূন্যের কাছাকাছি হয় তবে B বিন্দু A বিন্দুর অতি নিকটবর্তী হবে। এক্ষেত্রে $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ দ্বারা A বিন্দুতে তাৎক্ষণিক বেগ সূচিত হবে। A বিন্দুতে t সময়ে তাৎক্ষণিক বেগ $\vec{v}$ হবে

$$\vec{v} = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

উপরের আলোচনা হতে তাৎক্ষণিক বেগের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যেতে পারে “সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে গড় বেগের সীমান্তিক বা প্রান্তিক মানকে তাৎক্ষণিক বেগ বলে”।

বেগের একক ms^{-1} এবং মাত্রা LT^{-1}।

কাজ: কীভাবে গড়বেগ হতে তাৎক্ষণিক বেগ পাওয়া যায়- ব্যাখ্যা করুন।

মধ্যবেগ (Mean Velocity) :

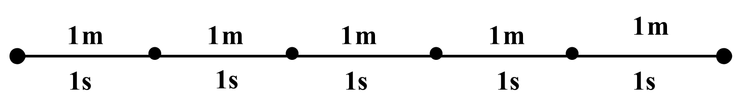
কোনো একটি গতিশীল বস্তুর প্রথম ও শেষ বেগ এর অভিমুখ একই হলে তাদের গড়কে মধ্য বেগ বলে। মনে করি, কোনো নির্দিষ্ট দিকে একটি বস্তুর আদিবেগ $\vec{v}_o$ এবং শেষ বেগ $\vec{v}$

$\therefore$ মধ্যবেগ $= \dfrac{\vec{v}_o + \vec{v}}{2}$

সমবেগ (Uniform velocity) :

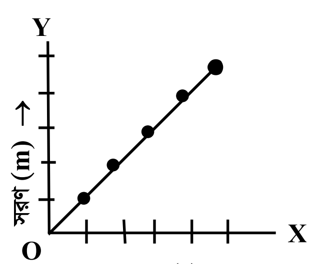
বেগ যদি সব সময় ধ্রুব থাকে তাহলে তাকে সমবেগ বলে অর্থাৎ কোনো বস্তু যদি নির্দিষ্ট দিকে সমান সময়ে সমান পথ অতিক্রম করে তাহলে বস্তুর বেগকে সমবেগ বলে। যেমন শব্দের বেগ, আলোর বেগ ইত্যাদি।

ব্যাখ্যা : ২.৭ চিত্রে পাঁচটি বিন্দু দ্বারা 1s পর পর কোনো সরল রেখা বরাবর একই দিকে গতিশীল একটি বস্তুর অবস্থান নির্দেশ করা হয়েছে। এখানে পরপর দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দুরত্ব 1m। বস্তুটি একই অভিমুখে প্রতি সেকেন্ডে 1m দুরত্ব অতিক্রম করছে অর্থাৎ সমান সময়ে সমান পথ অতিক্রম করছে। কাজেই বস্তুর এ বেগ সমবেগ এবং এর মান হচ্ছে $1ms^{-1}$। চিত্র ২.৭ (ক) ও চিত্র ২.৭ (খ) দ্বারা সমবেগ প্রকাশ করা হয়েছে।



চিত্র ২.৭ (ক)

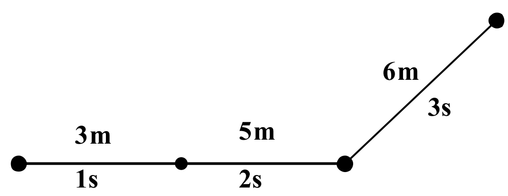
কাজ : একটি বস্তুর সমবেগ $5ms^{-1}$ এর অর্থ কী?



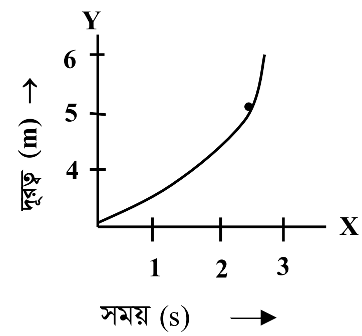
চিত্র ২.৭ (খ)

অসম বেগ (Non-uniform Velocity) :
বেগ যদি বিভিন্ন সময়ে বিভিন্ন রকম হয় তাহলে তাকে অসম বেগ বলে। যদি কোনো বস্তুর বেগের মান বা দিক বা উভয় পরিবর্তিত হয় তখন সেই বেগকে অসমবেগ বলে।

ব্যাখ্যা : ধরি একটি গতিশীল বস্তু একটি দিকে প্রথম সেকেন্ডে 3 m, দ্বিতীয় সেকেন্ডে একইদিকে 5 m, তৃতীয় সেকেন্ডে দিক পরিবর্তন করে 6 m দুরত্ব অতিক্রম করে। ২.৮ চিত্রে বস্তু সমান সময়ে সমান পথ বা একই দিকে পথ অতিক্রম করছে না। সুতরাং এই বেগ অসম বেগ।



চিত্র ২.৮ (ক)



চিত্র ২.৮ (খ)

দ্রুতি (Speed): কোনো বস্তু একক সময়ে যে দূরত্ব অতিক্রম করে বা দূরত্বের হারকে দ্রুতি বলে। এটি একটি স্কেলার রাশি। বেগের মান দ্বারা দ্রুতি পরিমাপ করা হয়।

গাণিতিক ভাবে বেগ, $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

$\therefore$ দ্রুতি, $v = |\vec{v}| = \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|$

অর্থাৎ, $v = \dfrac{dr}{dt}$

ত্বরণ (Acceleration): সময়ের সাথে কোনো বস্তুর বেগের পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বলা হয়। ত্বরণ একটি ভেক্টর রাশি। কোনো বস্তুর ত্বরণ জানতে হলে বস্তুটির বেগের পরিবর্তনের হার এবং উক্ত পরিবর্তনের দিক উভয়ই জানতে হয়।

গড় ত্বরণ (Average acceleration): যেকোনো সময় ব্যবধানে বস্তুর গড়ে প্রতি একক সময়ে বেগের যে পরিবর্তন হয় তাকে বস্তুটির গড় ত্বরণ বলে। কোনো নির্দিষ্ট সময় ব্যবধানে, বস্তুর বেগের যে পরিবর্তন হয় তাকে উক্ত সময় ব্যবধান দিয়ে ভাগ করলে গড় ত্বরণ পাওয়া যায়।

ধরি গতিশীল একটি বস্তুর t_1 ও t_2 সময়ের বেগ যথাক্রমে $\vec{v}_1$ ও $\vec{v}_2$। এক্ষেত্রে সময়ের পরিবর্তন

$\Delta t = t_2 - t_1$ এবং বেগের পরিবর্তন $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$।

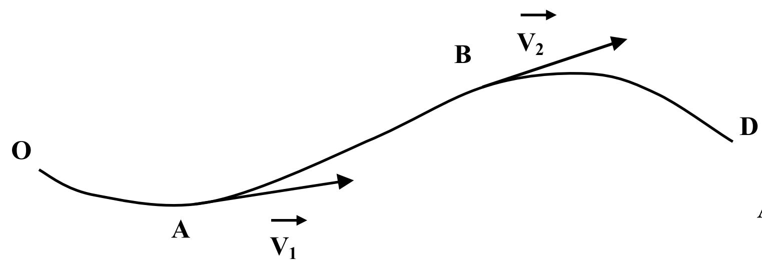
$\therefore$ Δt সময় ব্যবধানে একটি বস্তুর বেগের পরিবর্তন $\Delta\vec{v}$

সুতরাং গড় ত্বরণ, $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

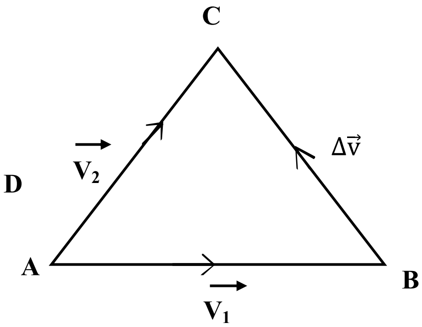
তাৎক্ষনিক ত্বরণ (Instantaneous acceleration) :
সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সাথে কোনো বস্তুর বেগের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক ত্বরণ বলে।

ব্যাখ্যা : মনে করি একটি বস্তু কণার গতিপথ OABD চিত্র ২.৯ (ক)। A বিন্দুতে এর তাৎক্ষণিক ত্বরণ নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি, t সময়ে কণাটির অবস্থান A এবং বেগ $\vec{v}_1$। $t + \Delta t$ সময়ে কণাটির অবস্থান B এবং বেগ $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}$



চিত্র : ২.৯ (ক)



চিত্র : ২.৯ (খ)

Δt সময় ব্যবধানে বেগের পরিবর্তন $= \Delta\vec{v}$

কণাটির গড় ত্বরণ $= \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

$\Delta t = 0$ হলে $\Delta\vec{v} = 0$ এবং Δt সময়ে বেগের পরিবর্তন $\Delta\vec{v}$। Δt যত ক্ষুদ্র $\Delta\vec{v}$ ততই ক্ষুদ্র হবে, $\Delta t = 0$ হলে B বিন্দু A বিন্দুর নিকটবর্তী হবে অর্থাৎ Δt শূন্যের কাছাকাছি হলে $\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ দ্বারা A বিন্দুতে তাৎক্ষণিক ত্বরণ সূচিত হবে।

$\therefore$ A বিন্দুতে তাৎক্ষণিক ত্বরণ

$$\vec{a} = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

অর্থাৎ সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে, গড় ত্বরণের প্রান্তিক মান ত্বরণের সমান।

কিন্তু $\underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ হচ্ছে t এর সাপেক্ষে $\vec{v}$ এর অন্তরক $\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$$\therefore \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

সুতরাং, ত্বরণ হচ্ছে সময়ের সাপেক্ষে বেগের অন্তরক সহগ।

সুতরাং ত্বরণ, $a = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dr}{dt}\right) = \dfrac{d^2r}{dt^2}$

ত্বরণের একক ms^{-2} এবং মাত্রা LT^{-2}।

সমত্বরণ (Uniform acceleration) :

কোনো গতিশীল বস্তুর ত্বরণ যদি সব সময় ধ্রুব থাকে তাহলে তাকে সমত্বরণ বলে। এক্ষেত্রে ত্বরণের মান ও দিক উভয়ই ধ্রুব থাকতে হবে। মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর ত্বরণ সমত্বরণের একটি বাস্তব উদাহরণ।

তাৎপর্য : একটি বস্তুর সুষম ত্বরণ $5ms^{-2}$ বলতে বুঝায় যে, একটি নির্দিষ্ট দিকে বস্তুটির বেগ প্রতি সেকেন্ডে $5ms^{-1}$ বৃদ্ধি পাচ্ছে।

অসম ত্বরণ (Variable acceleration) :

কোনো গতিশীল বস্তুর সময়ের সাথে যখন ত্বরণ ভিন্ন হয় তখন তাকে অসম ত্বরণ বলে। ত্বরণের মান বা দিক কিংবা মান এবং দিক উভয়ের পরিবর্তনের জন্য অসম ত্বরণ সৃষ্টি হতে পারে। বাস, ট্রেন, মোটগাতি ইত্যাদির ত্বরণ অসম ত্বরণের উদাহরণ। এক কথায় গতিশীল প্রায় বস্তুর ত্বরণই অসম ত্বরণ।

মন্দন (Retardation বা deceleration) :

সময়ে সাথে গতিশীল বস্তু কণার বেগের হ্রাসের হারকে মন্দন বলে। অন্য ভাবে একক সময়ে গতিশীল বস্তুকণার বেগের পরিবর্তন কমতে থাকলে যে রাশি পাওয়া যায় তাকে মন্দন বলে। মন্দনের একক ও মাত্রা ত্বরণের অনুরূপ।

নিজে করুন : সুষম বা সমবেগের ক্ষেত্রে ত্বরণ বা মন্দন শূন্য থাকে না কেন? ব্যাখ্যা করুন।

সার-সংক্ষেপ :

- **সরণ:** কোনো বস্তুর সরণ একটি ভেক্টর যার মান বস্তুটির শেষ এবং আদি অবস্থানের মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব এবং দিক হলো আদি থেকে শেষ অবস্থানের দিকে।
- **গড় দ্রুতি:** কোনো বস্তু কর্তৃক অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব এবং মোট ব্যয়িত সময়ের ভাগফলকে গড় দ্রুতি বলে।
- **তাৎক্ষণিক দ্রুতি বা দ্রুতি:** সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সঙ্গে বস্তুর দূরত্বের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক দ্রুতি বা দ্রুতি বলে।
- **গড় বেগ:** যেকোনো সময় ব্যবধানে বস্তুর গড়ে প্রতি একক সময়ে যে সরণ হয় তাকে বস্তুটির গড় বেগ বলে।
- **তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগ:** সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সঙ্গে বস্তুর সরণের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগ বলে।
- **গড় ত্বরণ:** যেকোনো সময় ব্যবধানে বস্তুর গড়ে প্রতি একক সময়ে বেগের যে পরিবর্তন হয় তাকে গড় ত্বরণ বলে।
- **তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা ত্বরণ:** সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে কোনো একটি গতিশীল বস্তুর বেগ বৃদ্ধির হারকে তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা ত্বরণ বলে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.২

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরটিতে টিকে (√) চিহ্ন দিন

১। গতিশীল বস্তুর নির্দিষ্ট দিকে অতিক্রান্ত দূরত্বই হলো ঐ বস্তুর-
ক. বেগ খ. সরণ গ. দ্রুতি ঘ. ত্বরণ

২। তাৎক্ষণিক বেগ পেতে হলে-
ক. সময় ব্যবধান শূন্য খ. সময় ব্যবধান অসীম গ. সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি ঘ. সময় ব্যবধান 1.

৩। বেগের মাত্রা-
ক. LT^{-1} খ. $L^{-1} T^{-1}$ গ. LT^{-2} ঘ. $L^{-1}T$.

৪। দ্রুতি কী ধরনের রাশি?
ক. দিক রাশি খ. স্কেলাররাশি গ. মৌলিক রাশি ঘ. ভেক্টর রাশি

পাঠ-২.৩ গতি সংক্রান্ত লেখচিত্রাবলি Graphs relating Motion

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

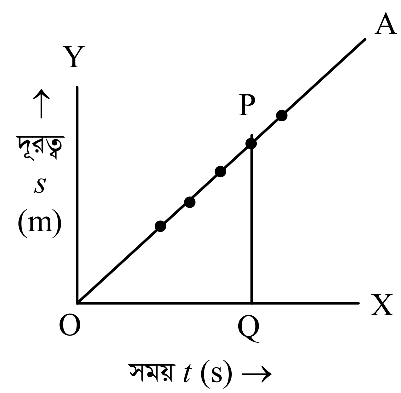
- অবস্থান সময় লেখচিত্র অংকন করতে পারবেন এবং এই লেখচিত্র থেকে গড় বেগ, তাৎক্ষণিক বেগ নির্ণয় করতে পারবেন।
- বেগ সময় লেখচিত্র অংকন করতে পারবেন এবং এই লেখচিত্র থেকে গড় ত্বরণ ও তাৎক্ষণিক ত্বরণ নির্ণয় করতে পারবেন।

২.৩.১ অবস্থান (দূরত্ব)-সময় লেখচিত্র (Position –Time Graphs) :

কোনো বস্তুর সময়ের সাথে অবস্থান পরিবর্তিত হলে লেখ-চিত্রের মাধ্যমে তার সম্যক ধারণা পাওয়া যায়। কোনো বস্তুর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে অন্য কোনো নির্দিষ্ট দূরত্বের বিন্দুতে অবস্থিত হলে সেই বিন্দু থেকে বস্তুর দূরত্বকে অবস্থান বলে।

দূরত্ব-সময় লেখচিত্র (সমবেগের ক্ষেত্রে)

মনে করুন, একটি বস্তু সরল রৈখিক গতিতে চলছে। আরও ধরুন বস্তুটি সুষম বেগে চলছে। লেখচিত্রের X অক্ষে সময় (t) এবং Y অক্ষে দূরত্ব (s) এর মান বসালে লেখচিত্রের কতকগুলো বিন্দু পাওয়া যায়। বিন্দুগুলো যোগ করলে তারা একটি সরল রেখার আকার নেয় এবং লেখটিকে বর্ধিত করলে এটি X অক্ষ এবং Y অক্ষের সংযোগ বিন্দু O অর্থাৎ মূল বিন্দু দিয়ে গমন করে। OA রেখার উপর P একটি বিন্দু এবং P হতে X অক্ষের উপর PQ লম্ব টানুন। লেখ চিত্র হতে পাবেন যে কোনো সময়ে (t = OQ) অতিক্রান্তর দূরত্ব PQ (চিত্র ২.১০)।



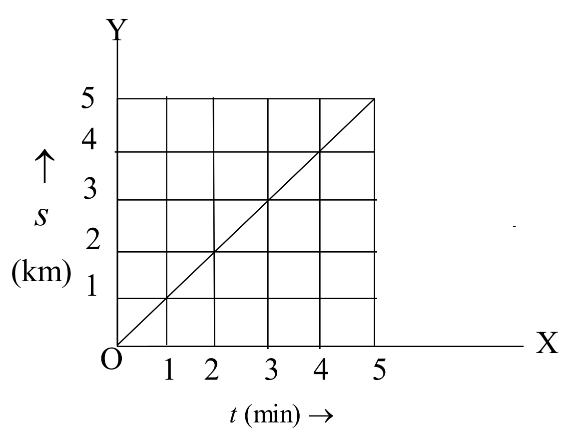
চিত্র- ২.১০

বেগের সংজ্ঞানুসারে বেগ, $v = \frac{PQ}{OQ}$ যা OA রেখার ঢাল হিসেবে পরিচিত।

উদাহরণ: সারণি ২.১ লক্ষ্য করুন। একজন সাইকেল আরোহী সারণিতে উল্লিখিত সময়ে যে দূরত্ব অতিক্রম করেন লেখচিত্র দ্বারা তা দেখানো হলো (চিত্র ২.১১)।

সারণি ২.১ : দূরত্ব সময়

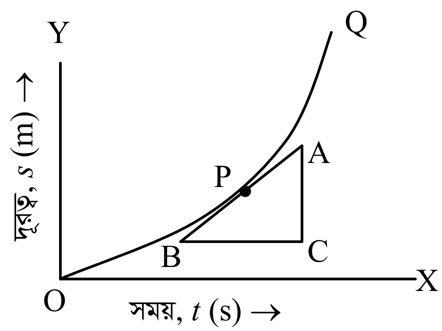
সময় t min.	দূরত্ব s km
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4



চিত্র : ২.১১

দূরত্ব-সময় লেখচিত্র (অসম বেগের ক্ষেত্রে) :

মনে করুন গতিশীল বস্তুটি সুষম বেগে চলছে না। বস্তুটি একই সময় ব্যবধানে বিভিন্ন দূরত্ব অতিক্রম করছে। সময়কে X-অক্ষে এবং দূরত্বকে Y-অক্ষে লেখচিত্রে স্থাপন করে বিন্দুগুলো যোগ করলে দেখতে পাবেন এটি সরল রেখা হয় না। এটি একটি বক্ররেখা হয়।



চিত্র-২.১২

এক্ষেত্রে ধরুন OPQ একটি বক্ররেখা। রেখার উপর P বিন্দুতে বেগ নির্ণয় করবেন। P বিন্দুকে স্পর্শ করে OPQ বক্র রেখার উপর APB একটি স্পর্শক রেখা টেনে ABC সমকোণী ত্রিভুজ অংকন করুন। এই সমকোণী ত্রিভুজ হতে ঢাল নির্ণয় করুন। অতএব P বিন্দুতে বেগ হলো P বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকের ঢাল। চিত্রানুযায়ী P বিন্দুতে বেগ, $v = \frac{AC}{BC}$ ।

২.৩.২ বেগ-সময় লেখচিত্র (Velocity-Time Graph) :

গতিশীল বস্তুর সময়কে অনুভূমিক X-অক্ষ বরাবর এবং ঐ সময় সাপেক্ষে বস্তুটির বেগকে Y অক্ষ বরাবর স্থাপন করে যে লেখচিত্র পাওয়া যায় তাকে বেগ বনাম সময় বা v - t লেখচিত্র বলে।

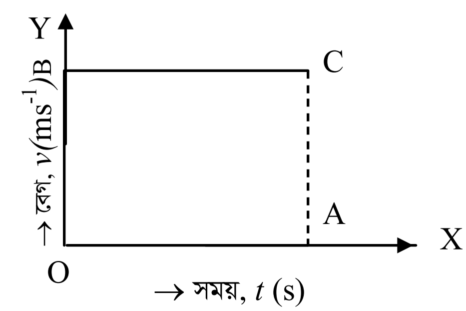
বেগ-সময় লেখচিত্র (সম-বেগের ক্ষেত্রে):

সমবেগে চলমান বস্তুর সময় সাপেক্ষে বেগের লেখচিত্র সময় X-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা BC দ্বারা প্রকাশ করা হয় (চিত্র ২.১৩)। সময়ের সাথে বেগের কোনো পরিবর্তন হয় না বলেই এটি সরল রেখা হয়।

বেগ-সময় লেখচিত্রে সময় ও বেগকে যথাক্রমে X অক্ষ ও Y অক্ষে স্থাপন করলে এটি OACB আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হয়।

$\therefore$ OACB আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $OB \times OA = vt = s$

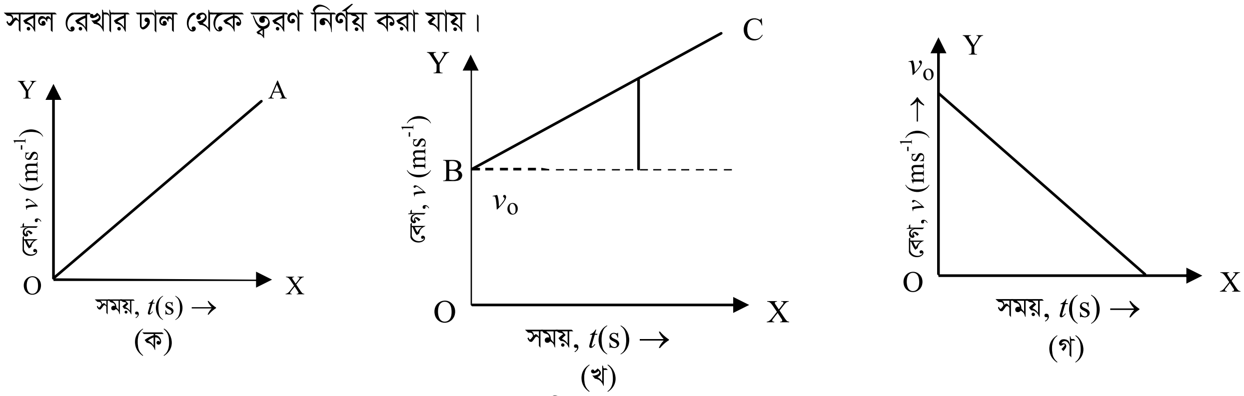
অর্থাৎ বস্তু দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্ব বেগ সময় লেখচিত্রের বেগ ও সময়ের অক্ষের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফলের সমান হয়।



চিত্র-২.১৩

বেগ-সময় লেখচিত্র (সমত্বরণের ক্ষেত্রে) :

সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর বেগ-সময় লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা হয়। একই সময় ব্যবধানে একই পরিমাণ বেগ বৃদ্ধি হয়, তাই লেখচিত্রটি এরূপ হয়। বস্তুটি স্থির অবস্থান থেকে যাত্রা শুরু করলে সরল রেখাটি মূলবিন্দুগামী হয়, ২.১৪ (ক) চিত্রে তা হবে OA সরল রেখা। এই সরল রেখার ঢাল থেকে ত্বরণ নির্ণয় করা যায়।



চিত্র : ২.১৪

কিন্তু বস্তুর প্রাথমিক বেগ শূন্য না হলে বেগ সময় লেখচিত্রটি Y অক্ষকে ছেদকারী BC সরলরেখা হবে [চিত্র ২.১৪ (খ)]। এখানে OB প্রাথমিক বেগ v_o। উভয়ক্ষেত্রে সরল রেখাটির ঢাল বস্তুর ত্বরণের সমান।

বেগ-সময় লেখচিত্র (সম মন্দনের ক্ষেত্রে) :

সম মন্দনে গতিশীল বস্তুর আদিবেগ থাকবেই। এক্ষেত্রেও বেগ সময় লেখচিত্রটি সরলরেখা হবে কিন্তু ঢাল ঋণাত্মক হবে [চিত্র ২.১৪ (গ)]। ঋনাত্মক ঢাল দ্বারা মন্দন বুঝায়। সর্ব শেষে বস্তুটি স্থির অবস্থায় আসবে অর্থাৎ বেগ শূন্য হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ২.১ : একটি ট্রেন একটি রেল স্টেশন থেকে অপর রেল স্টেশনের দিকে যাত্রা শুরু করল। ট্রেনটির বেগের লেখচিত্র দেখানো হলো।

ক) লেখচিত্রটি ব্যাখ্যা করুন। খ) ট্রেনটির ত্বরণ নির্ণয় করুন।

(ক) লেখের AB রেখাটির ঢাল ধনাত্মক; সুতরাং ট্রেনটি প্রথম 5 মিনিট সমত্বরণে চলেছে। BC রেখার ঢাল শূন্য, সুতরাং ট্রেনটি 5 থেকে 35 মিনিট পর্যন্ত শূন্য ত্বরণে অর্থাৎ সমবেগে চলেছে। CD রেখার ঢাল ঋণাত্মক, সুতরাং 35 থেকে 40 মিনিট পর্যন্ত ট্রেনটি সমমন্দনে চলেছে।

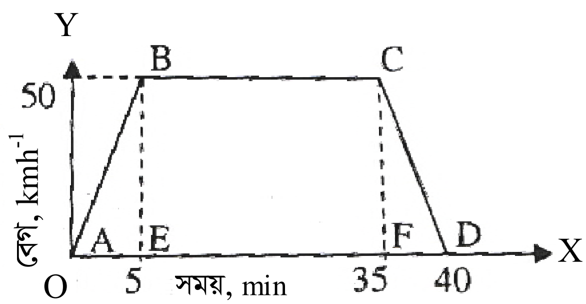
খ) ত্বরণ, a = রেখার ঢাল $= \tan\theta = \frac{BE}{AE} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

এখানে, $\Delta v = (50 - 0)\ \text{kmh}^{-1}$

$$= \frac{50 \times 1000}{3600}\ \text{ms}^{-1} = 13.89\ \text{ms}^{-1}$$

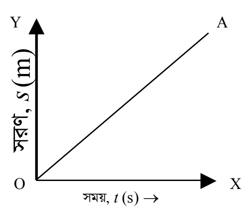
এবং $\Delta t = (5 - 0)\ \text{min.} = 5 \times 60\ \text{s} = 300\ \text{s}$

$$\therefore a = \frac{13.89\ \text{ms}^{-1}}{300\ \text{s}} = 0.0463\ \text{ms}^{-2}$$



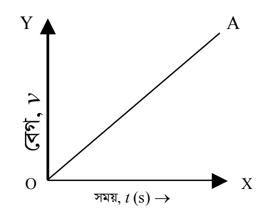
উত্তর: $0.0463\ \text{ms}^{-2}$

সার-সংক্ষেপ :



(ক)

"ক" চিত্রে সরণ বনাম সময় লেখচিত্রটি সমবেগ নির্দেশ করে।



(খ)

"খ" চিত্রে বেগ বনাম সময় লেখচিত্রটি সমত্বরণ নির্দেশ করে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.৩

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন

১। সরণ-সময় রেখার ঢাল কিসের মান নির্দেশ করে?

ক. দ্রুতি খ. বেগ গ. ত্বরণ ঘ. মন্দন

২। বেগ-সময় রেখার ঢাল কিসের মান নির্দেশ করে?

ক. দ্রুতি খ. বেগ গ. ত্বরণ ঘ. সরণ

৩। বেগ-সময় লেখটি X অক্ষের সমান্তরাল। এর অর্থ কি?

ক. বস্তুটির ত্বরণ ধনাত্মক খ. বস্তুটির ত্বরণ ঋণাত্মক

গ. বস্তুটির ত্বরণ শূন্য ঘ. লেখটি দ্বারা ত্বরণের মান পাওয়া সম্ভব নয়।

৪। সরণ-সময় লেখটি একটি বক্র রেখা। এর অর্থ কি?

ক. বস্তুটির বেগ সুষম খ. বস্তুটির বেগ অসম

গ. বস্তুটির বেগ শূণ্য ঘ. লেখটির দ্বারা বেগের মান পাওয়া যায় না

পাঠ-২.৪ গতির সমীকরণ
Equation of Motion

উদ্দেশ্য

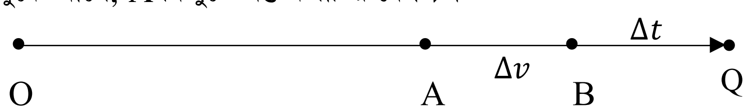
এ পাঠ শেষে আপনি-

- অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণ ব্যবহার করে গতির সমীকরণগুলো প্রতিপাদন করতে পারবেন।
- গতির সমীকরণ ব্যবহার করে বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

২.৪.১. গাণিতিক প্রকাশঃ

(i) $v = v_0 + at$ প্রতিপাদনঃ

মনে করি নির্দিষ্ট বিন্দু O হতে OQ বরাবর একটি বস্তুকণা v_0 আদিবেগে a সুষম ত্বরণে চলে t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে A বিন্দুকে আসে, A বিন্দুতে বস্তু কণাটির বেগ v।



O	A	B
$t = 0$	$t = t$	$t + \Delta t$
$s = 0$	$s = s$	$s + \Delta s$
$v = v_o$	$v = v$	$v + \Delta v$

ধরা যাক, $t + \Delta t$ সময়ে উক্ত বস্তুকণাটি $s + \Delta s$ দূরত্ব অতিক্রম করে B বিন্দুতে আসে এবং B বিন্দুতে এর বেগ $v + \Delta v$। ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে

$$a = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{L}t} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = adt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (২.১)$$

$t = 0$ হতে $t = t$ এবং $v = v_0$ হতে $v = v$ সীমার মধ্যে (২.১) নং সমীকরণকে যোগজীকরণ করে পাই,

$$\int_{v_o}^{v} dv = \int_{o}^{t} adt$$

$$[v]_{v_o}^{v} = a[t]_o^t$$

$$v - v_0 = a(t - o)$$

$$\therefore\ v = v_0 + at \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (২.২)$$

(ii) $s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ প্রতিপাদন

আবার বেগের সংজ্ঞানুসারে

$$v = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{L}t} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

বা $ds = vdt$

বা $ds = (v_0 + at)dt$

বা $ds = v_0\, dt + a\, dt$ .... (২.৩)

(২.৩) নং সমীকরণকে $s = 0$ হতে $s = s$ এবং $t = 0$ হতে $t = t$ এই সীমার মধ্যে যোগজীকরণ করে পাই।

$$\int_o^s ds = \int_o^t v_o dt + \int_o^t at dt$$

$$\text{বা, } [s]_o^s = v_o[t]_o^t + a\,[\frac{t^2}{2}]_o^t$$

$$\text{বা, } s - 0 = v_0(t - 0) + a\left(\frac{t^2}{2} - 0\right)$$

$$\text{বা, } s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\therefore s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \text{..... .... (২.৪)}$$

(iii) $v^2 = v_0^{\ 2} + 2as$

ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে পাই

$$a = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

$$\text{বা, } a = \frac{dv}{ds} . \frac{ds}{dt}$$

$$\text{বা, } a = \frac{dv}{ds} . v$$

বা, $ads = vdv$..... .... (২.৫)

(২.৫) নং সমীকরণ $s = 0$ হতে $s = s$ এবং $v = v_0$ হতে $v = v$ সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাই,

$$\int_o^s ads = \int_{v_o}^v vdv$$

$$\text{বা, } a\,[s]_o^s = \left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_o}^v$$

$$\text{বা, } a\,(s - 0) = \frac{v^2}{2} - \frac{v_o^{\ 2}}{2}$$

$$\text{বা, } as = \frac{v^2 - v_o^{\ 2}}{2}$$

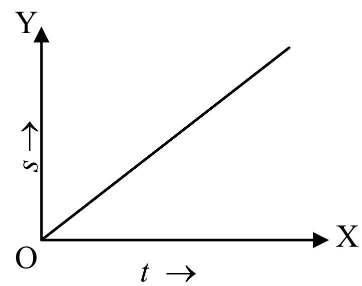
$$\text{বা, } v^2 - v_0^{\ 2} = 2as$$

$\therefore v^2 = v_0^{\ 2} + 2as$ .... (২.৬)

(iv) $s = vt$ প্রতিপাদন নিজে করুন।

২.৪.২ গতির সমীকরণ (লেখ-চিত্র দ্বারা) প্রকাশ:

(i) $s = vt$ সমীকরণের লেখ চিত্র :



চিত্র- ২.১৫

আপনারা গণিত বিষয়ের জ্যামিতি হতে জেনে থাকবেন সরলরেখাকে সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা হয়ে থাকে। মূল বিন্দুগামী যে কোনো সরল রেখার সমীকরণ $y = mx$, যেখানে x স্বাধীন চলরাশি, y অধীন চলরাশি এবং m কে ঢাল বলা হয়। $s=vt$ সমীকরণে সময় t স্বাধীন চলরাশি এবং s একটি অধীন চলরাশি। এখন স্বাধীন চলরাশিকে X অক্ষ বরাবর এবং অধীন চল রাশিকে Y-অক্ষ বরাবর স্থাপন করা হয় $s = vt$ সমীকরণটিকে $y = mx$ সমীকরণের সাথে তুলনা করলে বলা যায় যে,

$s = vt$ সমীকরণটির লেখচিত্র একটি মূলবিন্দুগামী সরল রেখা হবে (চিত্র ২.১৫)।

লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য :

১। সমীকরণটির লেখচিত্র একটি মূলবিন্দুগামী সরল রেখা হয়।

২। সরল রেখাটির ঢাল বেগ নির্দেশ করে।

৩। সরল রেখাটির ধনাত্মক X অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তার ট্যানজেন্ট $(\tan\theta)$ এর মানকে ঢাল বলে।

(ii) $v = v_0 + at$ সমীকরণের লেখচিত্র :

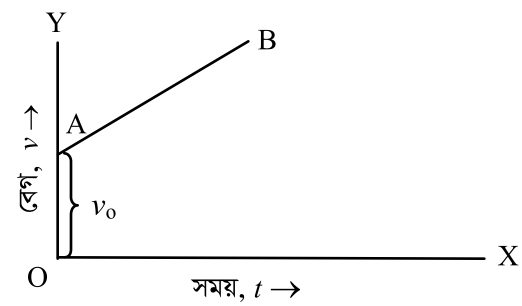
আপনারা গণিতের জ্যামিতি হতে জানেন $y = mx + c$ সমীকরণটি, মূলবিন্দুগামী নয়, ইহা Y অক্ষকে ছেদ করে এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ। $v = v_0 + at$ সমীকরণে t স্বাধীন চলরাশি এবং v অধীন চলরাশি। স্বাধীন চলরাশিকে X অক্ষ বরাবর এবং অধীন চলরাশিকে Y অক্ষ বরাবর স্থাপন করা হয়। সমীকরণটিকে $y = mx + c$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে বলা যায় $v = v_0 + at$ সমীকরণটি মূলবিন্দুগামী নয় এমন সরলরেখার সমীকরণ যেখানে v_0 কে c দ্বারা এবং ত্বরণ a কে ঢাল m দ্বারা নির্দেশ করা যায় (চিত্র : ২.১৬)।

লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য :

১। সমীকরণটির লেখচিত্র একটি সরল রেখা নির্দেশ করে।

২। রেখাটির ঢাল ত্বরণ নির্দেশ করে।

৩। $c = v_0 = 0$ হলে সমীকরণটি মূল বিন্দুগামী সরল রেখা হবে।

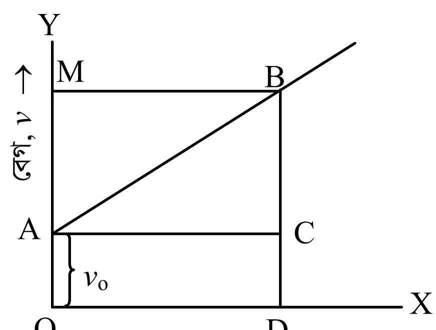


চিত্র : ২.১৬

২.৪.৩ v বনাম t লেখচিত্রের মাধ্যমে গতির সমীকরণ প্রতিপাদন:

$v = v_0 + at$ সমীকরণ প্রতিপাদন

t স্বাধীন চলরাশিকে X অক্ষ বরাবর এবং v অধীন চলরাশিকে Y অক্ষ বরাবর স্থাপন করে একটি বস্তু কণার বেগ বনাম সময় লেখচিত্র অংকন করি। $y = mx + c$ সমীকরণের সাথে তুলনা করলে এটি একটি সরলরেখা হয় যা Y অক্ষের একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করে। এই ছেদবিন্দু আদিবেগ v_0 নির্দেশ করে এবং ত্বরণ ঢাল নির্দেশ করে। মনে করি AB-ই নির্ণেয় সরল রেখা। AB রেখার উপর B বিন্দু হতে Y অক্ষের উপর BM লম্ব এবং X অক্ষের উপর BD লম্ব টানি (চিত্র ২.১৭)।



চিত্র : ২.১৭

মনে করি t সময়ে বস্তুর চূড়ান্ত বেগ $v = BD$

এখন $BD = CD + BC$

বা, $v = v_0 + BC$ ....(২.৭)

এখানে ঢাল, $a = \dfrac{BC}{AC}$

বা, $a = \dfrac{BC}{t}$

$\therefore$ BC = at

BC এর মান (২.৭) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$\therefore\ v = v_0 + at$ সমীকরণটি লেখচিত্রে উপস্থাপন করা যায়।

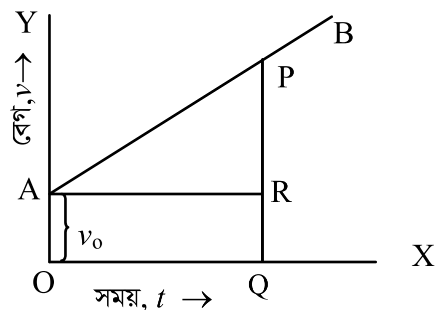
স্থির অবস্থানে থেকে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে $v_0 = 0$, $a =$ ধ্রুবক হয়

$v = at \therefore v \propto t$

অর্থাৎ বেগ সময়ের সমানুপাতিক।

(ii) $v = v_0 + at$ সমীকরণের লেখচিত্র হতে $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ সমীকরণটি প্রতিপাদন :

$v = v_0 + at$ সমীকরণটিকে $y = mx + c$ সমীকরণের সাথে তুলনা করা যায়। ফলে, X অক্ষের দিকে সময় t এবং Y অক্ষের দিকে বেগ v স্থাপন করে যে লেখচিত্র পাওয়া যায় তা একটি সরলরেখা হয়। সরলরেখাটি Y অক্ষরেখা হতে একটি নির্দিষ্ট অংশ ছেদ করে। এই ছেদকৃত অংশ আদিবেগ v_0 নির্দেশ করে এবং সরলরেখাটির ঢাল ত্বরণ a নির্দেশ করে। চিত্রানুসারে ধরা যাক, AB-ই নির্ণেয় সরলরেখা যা $v = v_0 + at$ সমীকরণের রেখচিত্রকে নির্দেশ করে (চিত্র : ২.১৮)।



চিত্র : ২.১৮

AB রেখার উপর যেকোনো বিন্দু P হতে X অক্ষের উপর PQ লম্ব টানা হয়। এরপর A বিন্দু হতে PQ এর উপর আরেকটি লম্ব AR অংকন করা হয়।

সুতরাং, চিত্র ও বর্ণনা অনুসারে-

OQ = AR = t

OA = v_0=QR

আবার কণাটির ত্বরণ = a = AB রেখার ঢাল।

বা, $a = \tan\theta$

বা, $a = \dfrac{PR}{AR}$

বা, PR = $a \times$ AR

বা, PR = $a \times t$

t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব, s = AOQP ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

= AOQR আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + ARP ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

$= AO \times OQ + \frac{1}{2} \times AR \times PR$

$= AO \times OQ + \frac{1}{2} \times OQ \times PR$

$= v_0 \times t + \frac{1}{2} \times t \times at$

$$\therefore s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

গাণিতিক উদাহরণ ২.২: একটি বস্তু 50m উপর থেকে অভিকর্ষের টানে পড়ে 3m পুরু বালি ভেদ করার পর বেগ অর্ধেক হয়। বস্তুটি বালির আর কত গভীরে যেতে পারবে?

এখানে,
উচ্চতা, $h = 50$ m
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8$ ms^{-2}
আদিবেগ, $v_o = 0$
শেষবেগ, $v = ?$

বালির মধ্যে গতির প্রথম অংশে-
আদিবেগ, $v_o = 31.3$ ms^{-1}
শেষবেগ, $v = \frac{v_o}{2} = \frac{31.3}{2}$
$= 15.65$ ms^{-1}
দূরত্ব, $s = 3$ m
মন্দন, $a = ?$

বালির মধ্যে গতির প্রথম অংশে-
আদিবেগ, $v_o = 15.65$ ms^{-1}
শেষবেগ, v = 0
মন্দন, $a = -$ 122.46 ms^{-1}
গভীরতা, $s = ?$

সমাধান : ধরি, বালি স্পর্শ করার পূর্ব মুহূর্তে বস্তুটির বেগ $v$ms^{-1}

আমরা পাই, $v^2 = v_o^2 + 2gh$

বা, $v^2 = (0)^2 + 2 \times 9.8 \times 50$

$\therefore \; v = 31.3$ ms^{-1}

$\therefore$ বালি স্পর্শ করার পূর্ব মুহূর্তে বস্তুটির বেগ 31.3 ms^{-1}

আবার, $v^2 = v_o^2 + 2as$

বা, $(15.65)^2 = (31.3)^2 + 2.a.3$

বা, $a =- \frac{(15.65)^2 - (31.3)^2}{2\times3}$

$\therefore a = -122.46$ ms^{-2}

আবার, $v^2 = v_o^2 + 2as$

বা, $s = \frac{v^2 - v_o^2}{2s}$

বা, $s = \frac{(0)^2 - (15.65)^2}{2\times(-122.46)}$

$\therefore \; s = 1$ m

উত্তর: বস্তুটি বালির আর 1 m গভীরে যেতে পারবে।

গাণিতিক উদাহরণ ২.৩: একটি বাঘ 8 m সম্মুখে একটি হরিণকে দেখতে পেয়ে স্থিরাবস্থা থেকে 1 ms^{-2} ত্বরণে তার পিছনে দৌড়াতে থাকে। হরিণটি টের পেয়ে 3ms^{-1} সমবেগে চলতে থাকলে কতক্ষণ পরে ও কত দূরত্ব অতিক্রম করে বাঘটি হরিণটিকে ধরতে পারবে?

সমাধান : মনে করি, বাঘটি t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে হরিণটিকে ধরতে পারবে।

বাঘের অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = v_o t + \frac{1}{2} at^2$

$= 0 \times t + \frac{1}{2} \times 1 \times t^2$

$= \frac{1}{2} t^2$

হরিণের অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s_1 = vt = 3t$

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2} t^2 - 8 = 3t$

বা, $t^2 - 6t - 16 = 0$

বা, $(t - 8)(t + 2) = 0$

$\therefore \; t = 8 \quad [\because t \neq -2]$

এখন, $s = \frac{1}{2} t^2 = \frac{1}{2} (8)^2 = 32$m

উত্তর: বাঘটি 8 s-এ 32 m দূরত্ব অতিক্রম করে হরিণটিকে ধরতে পারবে।

সার-সংক্ষেপ :

- **গতির সমীকরণ:** গতি বিষয়ক সংকেতগুলোকে কতকগুলো সমীকরণের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। এদেরকে গতির সমীকরণ বলে।
- i) $v = v_o + at$ ii) $s = v_o t + \frac{1}{2}at^2$ iii) $v^2 = v_o^2 + 2as$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.৪

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন ।

১। কোনো বস্তু স্থিতিশীল অবস্থা হতে যাত্রা শুরু করে a সমত্বরণে চলে t সময়ে কত দূরত্ব অতিক্রম করবে?

ক. $s = at$ খ. $s = \frac{1}{2}at$ গ. $s = at^2$ ঘ. $s = \frac{1}{2}at^2$

২। একটি বস্তু একটি নির্দিষ্ট দিকে সমবেগে গতিশীল হলে-

i. বস্তুটির ত্বরণ শূন্য

ii. বস্তুটির বেগ সর্বদা সমান

iii. v বনাম t লেখটি হবে সময় অক্ষের সমান্তরাল একটি সরল রেখা

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

৩। $5ms^{-1}$ গড় বেগে গতিশীল বস্তু 1 মিনিটে কত দূরত্ব অতিক্রম করবে?

ক. 300 m খ. 0.03 km গ. $0.3 kms^{-1}$ ঘ. 0.30 m

৪। একটি গাড়ি স্থিরাবস্থা থেকে সমত্বরণে চলা শুরু করল। 3 সেকেন্ড পর গাড়িটি $9 ms^{-1}$ বেগ প্রাপ্ত হল। গাড়িটির ত্বরণ কত?

ক. $3 ms^{-2}$ খ. $3 kms^{-2}$ গ. $3 kms^{-1}$ ঘ. $3 ms^{-1}$

৫। একটি বস্তু স্থির অবস্থা থেকে $4 ms^{-2}$ সমত্বরণে যাত্রা শুরু করল, 6 s পর বস্তুটির বেগ কত হবে?

ক. $6 m^{-1}$ খ. $4 ms^{-1}$ গ. $24 kms^{-2}$ ঘ. $24 ms^{-1}$

পাঠ-২.৫ গতির সমীকরণের ভেক্টর রূপ
Vector form of Equation of Motion

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- গতি সংক্রান্ত বিভিন্ন ভেক্টর রাশিগুলোকে উপাংশের সাহায্য প্রকাশ করতে পারবেন।
- গতির সমীকরণগুলোকে ভেক্টর রূপে লিখতে পারবেন।

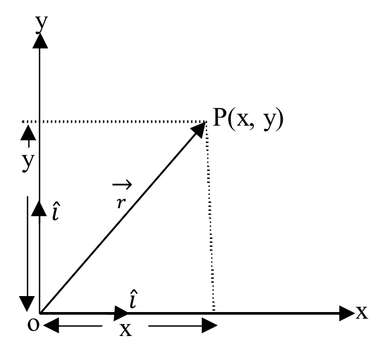
২.৫.১ গতিবিষয়ক রাশিমালার ভেক্টর প্রকাশঃ

আমরা পূর্ববর্তী ইউনিটে আলোচনা করেছি যে, প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থানকে যে ভেক্টর দ্বারা বুঝানো হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে। অবস্থান ভেক্টর কে $\vec{r}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

আপনারা জানেন দ্বিমাত্রিক তলে P বিন্দুর স্থানাংক (x,y) বা সংক্ষেপে $P(x,y)$ লিখা যায় (চিত্র ২.১৯)। মূল বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ ....(২.৮)

$\hat{i}$ ও $\hat{j}$ যথাক্রমে X অক্ষ ও Y অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর।



চিত্র : ২.১৯

বেগঃ

সরণের হারকে বেগ বলে।

সুতরাং বেগ : $\vec{v} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

$$= \frac{\Delta(x\hat{i} + y\hat{j})}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}$$

$$\therefore \vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

$$\therefore v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

তাৎক্ষণিক বেগ, $\vec{v} = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j}) = \dfrac{dx}{dt}\hat{i} + \dfrac{dy}{dt}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$.... ......(২.৯)

ত্বরণ বা তাৎক্ষণিক ত্বরণঃ সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সাথে বস্তুর বেগের পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বা তাৎক্ষণিক ত্বরণ বলে।

Δt সময় ব্যবধানে কোনো বস্তুর বেগের পরিবর্তন $\Delta\vec{v}$ হলে, ত্বরণ

$$\vec{a} = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

অর্থাৎ সময়ের সাপেক্ষে বস্তুর বেগ বৃদ্ধির হারকে ত্বরণ বলে। যেহেতু

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$$

$$\therefore \vec{a} = \frac{d}{dt}(v_x \hat{i} + v_y \hat{j})$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j}$$

$$= a_x \hat{i} + a_y \hat{j} \quad \text{.......... ....(২.১০)}$$

গাণিতিক উদাহরণ ২.৪: একটি কণার স্থানাংক $x(t)=\left(6ms^{-1}\right)t+\left(1.2ms^{-2}\right)t^2$, 2s **পর কণাটির বেগ ও ত্বরণ কত?**

সমাধান: আমরা জানি কণার বেগ-

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(6ms^{-1})t + (1.2ms^{-2})t^2\right]$$

$$= \left[6ms^{-1} + 1.2ms^{-2}.2t\right]$$

$t = 2s$ -এ

$$v_x = 6ms^{-1} + (1.2ms^{-2}) \times 2 \times 2s = 6ms^{-1} + 4.8ms^{-1} = 108ms^{-1}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[6ms^{-1} + (2.4ms^{-2}).t\right]$$

$$\therefore a = 2.4ms^{-2}$$

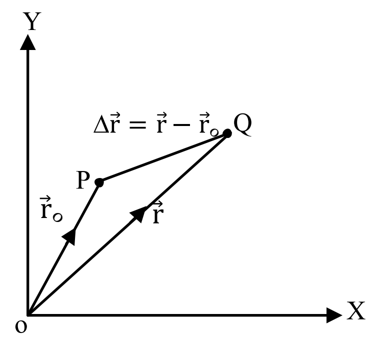
উত্তর: $108ms^{-1}$; $2.4ms^{-2}$

২.৫-২ : গতির সমীকরণের ভেক্টর রূপ প্রতিপাদন: (সরাসরি প্রতিপাদন)

(i). ধরা যাক একটি বস্তু $\vec{a}$ সমত্বরণে XY তলে গতিশীল, আরও ধরা যাক, গতির প্রাথমিক শর্তাদি হল সময় গণনায় শুরুতে অর্থাৎ যখন $t = 0$ তখন আদি অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}=\vec{r}_o$ এবং আদি বেগ $\vec{v} = \vec{v}_o$ । আবার যখন $t = t$ তখন বস্তুটির অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}=\vec{r}$ এবং বেগ $\vec{v}=\vec{v}$।

ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে, $\vec{a} = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

বা, $d\vec{v} = \vec{a}dt$ ....(২.১১)



চিত্র : ২.২০

$t = 0$ হতে $t = t$ এবং $\vec{v} = \vec{v}_o$ হতে $\vec{v} = \vec{v}$ সীমার মধ্যে (২.১১) সমীকরণকে যোগজীকরণ করে পাই

$$\int_{\vec{v}_o}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t=0}^{t=t} \vec{a}dt$$

বা, $[\vec{v}]_{\vec{v}_o}^{\vec{v}} = \vec{a}[t]_0^t$

বা, $\vec{v} - \vec{v}_o = \vec{a}(t - 0)$

বা, $\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}t$

$\therefore \vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}t$ .... (২.১২)

(ii) $\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$ সমীকরণ প্রতিপাদন

বেগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\vec{v} = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{L}t} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

বা, $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$

বা, $d\vec{r} = (\vec{v}_o + \vec{a}t)dt$

বা, $d\vec{r} = \vec{v}_o dt + \vec{a}\,t dt$ .... (২.১৩)

(২.১৩) নং সমীকরণের উভয় পার্শ্বে $\vec{r} = \vec{r}_o$ হতে $\vec{r} = \vec{r}$ এবং $t = 0$ হতে $t = t$ সীমার মধ্যে যোগজীকরণ করে পাই,

$$\int_{r_o}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_o^t \vec{v}_o dt + \int_o^t \vec{a}\,t dt$$

বা, $[\vec{r}]_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} = \vec{v}_o[t]_0^t + \vec{a}\,[\frac{t^2}{2}]_0^t$

বা, $\vec{r} - \vec{r}_o = \vec{v}_o(t-0) + \vec{a}\,(\frac{t^2}{2} - 0)$

বা, $\vec{r} - \vec{r}_o = \vec{v}_o\,t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$

$\therefore \vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$.............. ....(২.১৪)

(iii) $\mathbf{v^2 = v_o^2 + 2\,\vec{a}.(\vec{r} - \vec{r}_o)}$

(২.১২) নং সমীকরণের উভয় পার্শ্বে ডট গুনন করে পাই

$\vec{v}.\vec{v} = (\vec{v}_o + \vec{a}\,t).(\vec{v}_o + \vec{a}\,t)$

বা, $\vec{v}.\vec{v} = \vec{v}_o.\vec{v}_o + \vec{v}_o.\vec{a}\,t + \vec{v}_o.\vec{a}\,t + \vec{a}\,t.\vec{a}\,t$

বা, $\vec{v}.\vec{v} = \vec{v}_o.\vec{v}_o + 2\,\vec{a}.\vec{v}_o t + \frac{1}{2}2.\vec{a}.\vec{a}\,t^2$

বা, $v^2 = v_o^2 + 2\,\vec{a}.(\vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2)$

$\therefore v^2 = v_o^2 + 2\,\vec{a}.(\vec{r} - \vec{r_o})$ .... (২.১৫)

সার-সংক্ষেপ :

- **অবস্থান ভেক্টর:** গতির সমীকরণের ভেক্টর রূপ
- $(i)\ \vec{v} = \vec{v}_\circ + \vec{a}\,t$ $\quad(ii)\ \vec{r} - \vec{r}_\circ = \vec{v}_\circ t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$ $\quad(iii)\ \vec{v}^2 = \vec{v}_\circ{}^2 + 2\vec{a}.(\vec{r} - \vec{r}_\circ)$
- $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
- $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

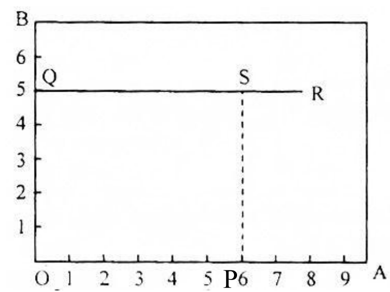
পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.৫

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন।

পাশের চিত্রটি লক্ষ্য করুন এবং ১-৩ নং প্রশ্নের উত্তর দিন :

পাশের লেখটি সমবেগ সম্পন্ন একটি বস্তুর জন্য প্রযোজ্য।



১. উক্ত লেখের যেকোনো অংশের ক্ষেত্রফল কী নির্দেশ করে?
ক. দূরত্ব খ. বেগ গ. গড়বেগ ঘ. ত্বরণ

২. বস্তুটির বেগের মান কত?
ক. 5 cm/s খ. 6 cm/s গ. 7 cm/s ঘ. 8 cm/s

৩. OQSP ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান-
i. 30 cm^2
ii. প্রথম 6 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব
iii. প্রথম 6 সেকেন্ডের জন্য বেগ ও সময়ের গুণফল
নিচের কোনটি সঠিক
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

পাঠ-২.৬ পড়ন্ত বস্তুর গতি
Motion of Falling Bodies

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- পড়ন্ত বস্তুর সূত্রগুলো বর্ণনা করতে পারবেন।
- পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে গতি সমীকরণগুলো লিখতে পারবেন।

২.৬.১ পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে গ্যালিলিওর সূত্র (Galileo's laws for falling Bodies):

আমরা দেখি যে, কোনো বস্তু উপর থেকে নিচে পড়ার সময় সরাসরি মাটির দিকে পড়তে থাকে। বস্তুর এই খাড়াভাবে পতনের কারণ অভিকর্ষ বা পৃথিবীর আকর্ষণ বল। প্রাচীন কালে মানুষের ধারনা ছিল যে ভারী বস্তু, হালকা বস্তুর তুলনায় তাড়াতাড়ি মাটিতে পড়ে। ইটালীর বিজ্ঞানী গ্যালিলিও ১৫৮৯ খ্রিষ্টাব্দে পিসা শহরে ১৮০ ফুট উচুঁ মিনারের ছাদ থেকে একই সাথে একটি ভারী ও একটি হালকা বস্তুকে নিচে ফেলে দিয়ে প্রমাণ করেন যে বস্তুদ্বয় প্রায় একই সময়ে মাটিতে পড়ে। অভিকর্ষজ ত্বরণ ভরের উপর নির্ভরশীল নয়। তাই নিচে পড়ার সময়, ভারী ও হালকা বস্তুর ত্বরণ একই হবে এবং বস্তুদ্বয় একই সময়ে মাটিতে পড়বে।

কাজ: টেবিলের উপর থেকে ডাস্টার ও কাগজ একই সাথে ছেড়ে দিয়ে পর্যবেক্ষণ করুন এবং মতামত দিন।

পড়ন্ত বস্তুর সূত্রগুলো স্থির অবস্থান থেকে বিনা বাধার পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। গ্যালিলিও পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে তিনটি সূত্র দেন। সূত্রগুলো নিম্নরূপ:

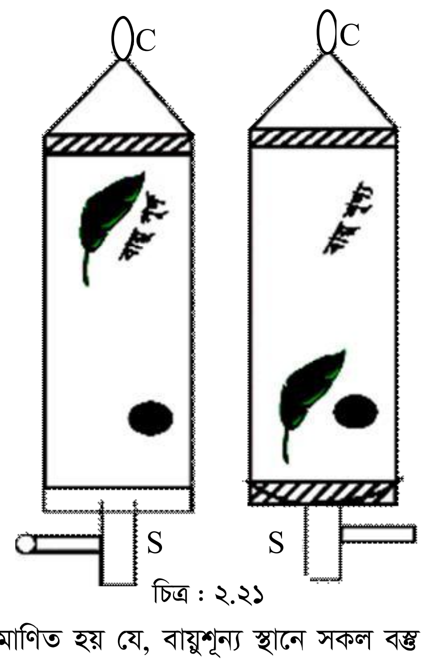
<u>প্রথম সূত্র:</u> স্থির অবস্থান থেকে এবং একই উচ্চতা থেকে বিনা বাধায় পড়ন্ত সকল বস্তু সমান সময়ে সমান পথ অতিক্রম করবে।

<u>দ্বিতীয় সূত্র:</u> বাধাহীন পথে পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময় পর প্রাপ্ত বেগ সময়ের সমানুপাতিক অর্থাৎ $v \propto t$.

<u>তৃতীয় সূত্র:</u> বাধাহীন পথে পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব সময়ের বর্গের সমানুপাতিক। অর্থাৎ $h \propto t^2$.

<u>মুদ্রা ও পালক পরীক্ষাঃ</u>

নিউটনই এই পরীক্ষা দ্বারা সর্বপ্রথম পড়ন্ত বস্তুর প্রথম সূত্র প্রমাণ দেন। পরীক্ষাটি নিম্নরূপঃ



চিত্র : ২.২১

এই পরীক্ষায় দুই মুখ খোলা এক মিটার লম্বা ফাঁপা শক্ত কাচ নল নেয়া হয়। নলে এক প্রান্ত একটি দাতব ছিপি C থাকে এবং অপর প্রান্তে একটি স্টপ কর্ক S লাগানো থাকে। স্টপ কর্কের নলের সাথে বায়ু নিষ্কাশন যন্ত্র সংযুক্ত করে নলকে বায়ু শূন্য করা যায় (চিত্র ২.২১)।

নলের ছিপি C খুলে বায়ুপূর্ণ নলের মধ্যে একটি মুদ্রা ও একটি পালক ঢুকানো হয়। এবার ছিপি বন্ধ করে নলটিকে হঠাৎ উল্টিয়ে দিয়ে দেখা যায় পালকের অনেক আগেই মুদ্রাটি নলের অপর প্রান্তে পৌঁছায়। একটি বায়ু নিষ্কাশন যন্ত্রের সাহায্যে নলটিকে বায়ুশূন্য করে পরীক্ষাটি পুনরায় করলে দেখা যায় মুদ্রা ও পালক একই সময়ে নলের অপর প্রান্তে পৌঁছায়। অতএব এই পরীক্ষা থেকে প্রমাণিত হয় যে, বায়ুশূন্য স্থানে সকল বস্তু সমান সময়ে সমান পথ অতিক্রম করে। বায়ুর মধ্যে বস্তুদ্বয় থাকার জন্য এদের ওজনের বিপরীত দিকে বাতাসের প্লবতা বা

ঊর্ধ্বমুখী বল কাজ করে। ভারী বস্তুর চেয়ে হালকা পালকের উপর প্লবতা বা ঊর্ধ্বমুখী বল বেশী হওয়ায় পালক দেরিতে পৌঁছায়।

কাজ-১ : যেকোনো উচ্চতা থেকে পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে অভিকর্ষীয় ত্বরণ সুষম থাকে না – ব্যাখ্যা করুন।

২.৬.২ পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে গতির সমীকরণগুলো নিম্নরূপঃ

পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে, বস্তুটি যেহেতু উপর থেকে সোজা পথে নিচে পড়ে, তাই এর ত্বরণ সর্বদা g। খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রেও উক্ত সমীকরণ প্রযোজ্য হবে। সেক্ষেত্রে ত্বরণ হবে -g।

পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে গতির সমীকরণগুলো নিম্নরূপ -

১। $v = v_o \pm gt$ ২। $h = v_o t \pm \frac{1}{2} g t^2$ ৩। $v = v_o^2 \pm 2gh$

<u>কয়েকটি বিশেষ সমীকরণঃ</u>

সর্বাধিক উচ্চতাঃ ধরা যাক একটি বস্তুকে v_o আদিবেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। বস্তুটি যখন সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছায় তখন এর শেষ বেগ $v = 0$ হয়। সর্বাধিক উচ্চতা H হলে আমরা গতি সমীকরণ পাই–

$$v^2 = v_o^2 - 2gh$$

বর্ণনানুসারে সর্বাধিক উচ্চতায় যখন $v = 0$

তখন $h = H$ বসিয়ে পাই–

$$0 = v_o^2 - 2gH$$

বা, $2gH = v_o^2$

$$\therefore H = \frac{v_o^2}{2g} \quad \text{.......... ....} \quad (২.১৬)$$

সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছাতে সময় t_m বা উত্থানকাল :

ধরা যাক v_o আদিবেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তুর t_m সময়ে সর্বাধিক উচ্চতায় পৌছায়। তখন এর শেষ বেগ শূন্য হয়।

আমিরা জানি, $v = v_o - gt$

বর্ণনানুসারে যখন $t = t_m$ তখন $v = 0$ হবে অর্থাৎ

$$0 = v_o - gt_m$$

$$t_m = \frac{v_o}{g} \quad \text{.......... ....} \quad (২.১৭)$$

উড্ডয়ন কাল ঃ বস্তুটি যদি সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছে পুনরায় ভূমিতে ফিরে আসতে অর্থাৎ $h = 0$ অবস্থানে ফিরে আসতে যদি T সময় লাগে, অর্থাৎ যখন $h = 0$ তখন $t = T$, তবে $h = v_o t - \frac{1}{2} g t^2$ সমীকরণ হতে পাই-

$$0 = v_o T - \frac{1}{2} g T^2$$

বা, $\frac{1}{2} g T^2 = v_o T$

বা, $gT = 2v_o$

$$\therefore T = \frac{2v_o}{g} \quad \text{.......... ....} \quad (২.১৮)$$

পতনের সময় যদি t' হয়,

$$t' = T - t_m = \frac{2v_o}{g} - \frac{v_o}{g} = \frac{v_o}{g}$$

অর্থাৎ উত্থান ও পতনে সমান সময় লাগে।

গাণিতিক উদাহরণ ২.৫: একটি বস্তুকে $196\ ms^{-1}$ বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। বস্তুটি আবার ভূমিতে ফিরে আসতে কত সময় লাগবে এবং বস্তুটি সর্বোচ্চ কত উপরে উঠবে?

সমাধান: আমরা পাই, $T = \frac{2v_o}{g}$

$= \frac{2\times196}{9.8}$

$= 40\ s$

আবার সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = \frac{{v_o}^2}{2g}$

$= \frac{(196)^2}{2\times9.8}$

$= \frac{38416}{19.6}$

$= 1960\ m$

এখানে,
আদিবেগ, $v_o = 196\ ms^{-1}$
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8\ ms^{-2}$
উড্ডয়নকাল, $T = ?$
সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = ?$

উত্তর: বলটি 40 s -এ পৃথিবীতে ফিরে আসবে এবং সর্বোচ্চ 1960 m উচ্চতায় উঠবে।

সার-সংক্ষেপ :

- **পড়ন্ত বস্তুর সূত্র:** পড়ন্ত বস্তুর তিনটি সূত্র রয়েছে। সূত্রগুলো নিম্নে বিবৃত হলো।
- **১ম সূত্র:** স্থির অবস্থান হতে এবং একই উচ্চতা থেকে বিনা বাধায় পড়ন্ত সকল বস্তু সমান সময়ে সমান পথ অতিক্রম করে।
- **২য় সূত্র:** বাধাহীন পথে পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ের প্রাপ্ত বেগ ঐ সময়ের সমানুপাতিক অর্থাৎ $v \propto t$।
- **৩য় সূত্র:** বাধাহীন পথে পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ের অতিক্রান্ত দূরত্ব ঐ সময়ের বর্গের সমানুপাতিক অর্থাৎ $h \propto t^2$।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.৬

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন।

১. কে পড়ন্ত বস্তুর সূত্র আবিষ্কার করেন?
ক. নিউটন খ. আর্কিমিডিস গ. গ্যালিলিও ঘ. প্যাসকেল

২. পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে কোনটি সঠিক?
ক. $v \propto t^2$ খ. $v \propto t$ গ. $v \propto \sqrt{t}$ ঘ. $v \propto \frac{1}{t}$

৩. একটি ভারী ও একটি হালকা বস্তু বায়ুশূন্য স্থানের একই উচ্চতা হতে ফেলে দিলে কোনটি ঘটে?
ক. পতন কালে বস্তুদ্বয়ের বেগ কমতে থাকে খ. বস্তুদ্বয় একসাথে ভূমিতে পড়ে
গ. ভারী বস্তু আগে ভূমিতে পড়ে ঘ একই সময়ে বস্তুদ্বয়ের অতিক্রান্ত দূরত্ব ভিন্ন হয়

৪. কোনো বস্তুকে উপর থেকে ছেড়ে দিলে কোনটির প্রভাবে বস্তুটি ভূমিতে পৌঁছায়?
ক. প্লবতা খ. বস্তুর স্থিতিস্থাপকতা গ. বায়ু প্রবাহ ঘ. অভিকর্ষজ ত্বরণ

৫. মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর ওপর কোন বল কাজ করে?
ক. বাতাসের প্লবতা খ. বাতাসের বাধা গ. বাতাসের ঊর্ধ্বমুখী বল ঘ. অভিকর্ষজ বল

পাঠ-২.৭ প্রক্ষেপক বা প্রাসের গতি Projectile Motion

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- প্রাসের গতি বর্ণনা করতে পারবেন।
- প্রাসের গতিপথ পরাবৃত্ত (Parabola) প্রমাণ করতে পারবেন।
- প্রাসের ক্ষেত্রে বিভিন্ন রাশি যেমন সর্বাধিক উচ্চতা, বিচরণকাল, অনুভূমিক পাল্লা ইত্যাদি নির্ণয় করতে পারবেন।

২.৭.১ নিক্ষিপ্ত বস্তু বা প্রাস (Projectile):

আপনারা অনুভূমিক নয় তির্যকভাবে কখনও ঢিল ছুঁড়েছেন কী? নিশ্চয়ই দেখেছেন ঢিলটি প্রথমে ভূমি থেকে উপরে উঠে পুনরায় বাকা পথে ভূমিতে ফিরে আসে। বন্দুক থেকে নিক্ষিপ্ত গুলি, নিক্ষিপ্ত তীর বা বর্শার গতি, ফুটবলের গতি, বিমান থেকে নিক্ষিপ্ত বোমার গতি সকল ক্ষেত্রেই এই প্রকার গতিপথ লক্ষ্য করা যায়। কোনো বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে তির্যকভাবে বাতাসে নিক্ষেপ করলে তার উপর অভিকর্ষজ ত্বরণ কাজ করে এবং সমমন্দনে ক্রমশ উপরে উঠতে উঠতে বেগ শূন্য হয়। পুনরায় বস্তুটি একইভাবে ত্বরণের প্রভাবে ভূ-পৃষ্ঠে ফিরে আসে।

প্রাসের গতির বৈশিষ্ট্য নিম্নরূপ:

১। উল্লম্বতলে সীমাবদ্ধ ২। দ্বিমাত্রিক ৩। বক্রগতি
৪। সমত্বরণ বিশিষ্ট ৫। গতিপথ পরাবৃত্তাকার (প্যারাবোলা)

প্রাস ও প্রাসের গতিবিষয়ক কতিপয় সংজ্ঞা:

প্রাস: কোনো বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে তির্যকভাবে শূন্যে নিক্ষেপ করা হলে তাকে নিক্ষিপ্ত বস্তু বা প্রাস (Projectile) বলে।

নিক্ষেপন বেগ: যে আদি বেগে কোনো প্রাসকে শূন্যে নিক্ষেপ করা হয় তাকে নিক্ষেপন বেগ বলে। চিত্র-২.২২ এ $\vec{v}_o$ হলো নিক্ষেপন বেগ বা আদি বেগ।

নিক্ষেপন কোণ: যাত্রা শুরুর মূহূর্তে নিক্ষেপন বেগের অভিমুখ অনুভূমিকের সাথে যে কোণ সৃষ্টি করে তাকে নিক্ষেপন কোণ বলে। চিত্রে - θ নিক্ষেপন কোণ।

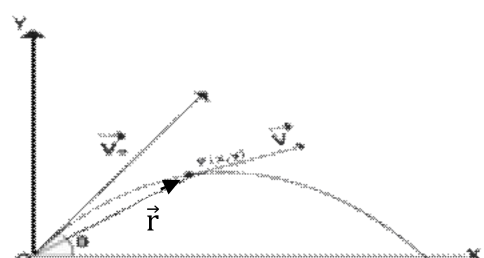
নিক্ষেপন বিন্দু: যে বিন্দু হতে প্রাসটি নিক্ষিপ্ত হয় তাকে নিক্ষেপন বিন্দু বলে। O নিক্ষেপন বিন্দু।

বিচরণ পথ: প্রাসের গতিপথকে এর বিচরণ পথ বলে। চিত্রে OPQ কে বিচরণ পথ বলে।

বিচরণ কাল: নিক্ষেপন বিন্দুগামী অনুভূমিক সমতলকে প্রসঙ্গ সমতল বলে। উৎক্ষেপন মূহূর্তে যে সময় পরে কোনো প্রাস প্রসঙ্গ সমতলে ফিরে আসে তাকে বিচরণ কাল বলে।

পাল্লা: প্রসঙ্গ সমতলের যে বিন্দুতে কোনো প্রাস পতিত হয় তাকে পতন বিন্দু (Point of fall) বলে। নিক্ষেপন ও পতন বিন্দুর মধ্যবর্তী অনুভূমিক দূরত্বকে পাল্লা বলে।

গতিপথের সমীকরণ: গতিপথ প্রধানত নিক্ষেপন বেগ, নিক্ষেপন কোণ ও অভিকর্ষজ ত্বরণ এর উপর নির্ভরশীল। বায়ুর বাধা গতিকে প্রভাবিত করে, তবে প্রাসের গতি বিষয়ক আলোচনায় বায়ুর বাধাকে সাধারণত উপেক্ষা করা হয়।



চিত্র : ২.২২

ধরা যাক, ভূমির উপরস্থ বা বায়ু মধ্যস্থিত O বিন্দু হতে একটি প্রাসকে নিক্ষেপ করা হলো (চিত্র-২.২২), O বিন্দুকে মূল বিন্দু ধরা হলো, OX ও OY যথাক্রমে X ও Y অক্ষ।

নিক্ষেপন বেগ বা আদি বেগ $= \vec{v}_o$

নিক্ষেপন কোণ $= \theta$

নিক্ষেপন বিন্দু ও মূলবিন্দু একই হওয়ায়; $x_o = y_o = 0$

অভিকর্ষজ ত্বরণ $\vec{g}$ এর অভিমুখ খাড়া নিচের দিকে, অতএব, বস্তুটির ত্বরণ,

$\vec{a} = -g\,\hat{j}$

আবার, $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$

$\therefore a_x = 0, a_y = -g$

X-অক্ষ বরাবর গতির পরিবর্তন উক্ত অক্ষ বরাবর ত্বরণের উপর নির্ভরশীল। Y-অক্ষ বরাবর গতির পরিবর্তন উক্ত অক্ষ বরাবর ত্বরণের উপর নির্ভরশীল। এ দুটি অক্ষ বরাবর গতির পরিবর্তন পরস্পর নির্ভরশীল নয়। অর্থাৎ একটি অক্ষ বরাবর বেগ ও ত্বরণ, অপর অক্ষ বরাবর প্রভাবিত করে না। তাই আমরা X-অক্ষ ও Y-অক্ষ বরাবর প্রাসের বেগ, ত্বরণ ও সরণকে আলাদাভাবে বিবেচনা করবো।

আদিবেগের অনুভূমিক উপাংশ, $v_{x_o} = v_o\cos\theta$ ....(২.১৯)

আদিবেগের উল্লম্ব উপাংশ, $v_{y_o} = v_o\sin\theta$ ....(২.২০)

ধরা যাক, t সময়ে প্রাসের বেগ $\vec{v}$।

আমরা জানি, $\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}t$

$\therefore v_x = v_{x_o} + a_x t$

বা, $v_x = v_o\cos\theta + 0\times t$ [$\because$ X-অক্ষ বরাবর ত্বরণ শূন্য]

বা, $v_x = v_o\cos\theta$ ....(২.২১)

আবার, $v_y = v_{y_o} + a_y t$

বা, $v_y = v_o\sin\theta - gt$ ....(২.২২)

(২.১৯) ও (২.২১) নং সমীকরণ হতে দেখা যায় যে, v_x সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয় না।

ধরা যাক, t সময়ে প্রাসটি $P(x, y)$ বিন্দুতে পৌঁছায় এবং এর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$।

আমরা জানি,

$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

$\therefore x = x_o + v_{x_o}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

বা, $x = 0 + v_o\cos\theta\, t + 0$

অর্থাৎ t সময়ে X অক্ষ বরাবর সরণ বা, $x = v_o\cos\theta\, t$ ....(২.২৩)

আবার,

$y = y_o + v_{y_o}t + \frac{1}{2}a_y t^2$

বা, $y = 0 + v_o\sin\theta\, t + \frac{1}{2}(-g)t^2$

বা, $y = v_o\sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2$ ....(২.২৪)

(২.২৩) নং সমীকরণ হতে পাই ,

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (২.২৫)$$

(২.২৪) ও (২.২৫) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$y = v_0 \sin\theta \times \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

বা, $y = x\tan\theta - \left(\frac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\theta}\right) x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (২.২৬)$

ধরা যাক, $\tan\theta = b$ (ধ্রুবক)

$\frac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\theta} = c$ (ধ্রুবক)

$\therefore y = bx - cx^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$ (২.২৭)

(২.২৭) নং সমীকরণটি x ও y এর মধ্যে সম্পর্ক প্রদান করে। এটিই বিচরণ পথের সমীকরণ। এ সমীকরণটি একটি প্যারাবোলার সমীকরণ। তাই প্রাসের বিচরণ পথ একটি পরাবৃত্ত বা প্যারাবোলা (Parabola)।

কাজ: প্রাসের গতিবেগ দ্বিমাত্রিক হলেও ত্বরণ একমাত্রিক হয় কেন?– ব্যাখ্যা করুন

প্রাসের সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছুতে সময় ঃ

ধরা যাক, (t') সময়ের বস্তুটির বেগ $= \vec{v}$

বেগের উল্লম্ব উপাংশ,

$v_y = v_{y_0} + a_y t$

বা, $0 = v_0 \sin\theta - gt'$

বা, $t' = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$

$\therefore\ t' = \frac{v_0 \sin\theta}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$ (২.২৮)

প্রাসের সর্বোচ্চ উচ্চতা:

আমরা জানি, প্রাসের ক্ষেত্রে তথা নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে যে কোনো মুহূর্তে তার বেগের উল্লম্ব উপাংশ এবং সরণের উল্লম্ব উপাংশের মধ্যে সম্পর্ক হল,

$${v_y}^2 = v_{y_0}^2 - 2gy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (২.২৯)$$

সর্বাধিক উচ্চতায় বস্তুর বেগের উল্লম্ব উপাংশ শূন্য হয়, অর্থাৎ $v_y = 0$

এই শর্ত (২.২৯) সমীকরণে ব্যবহার করে y এর যে মান পাওয়া যাবে তাই হবে সর্বাধিক উচ্চতা H সুতরাং উপরের সমীকরণ থেকে, যখন $v_y = 0$ তখন $y = H$ বসিয়ে পাই,

${v_y}^2 = v_{y_0}^2 - 2gy$

বা, $0 = (v_0 \sin\theta)^2 - 2gh \quad [\because v_{y_0} = v_0 \sin\theta]$

বা, $H = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}$

$\therefore\ H = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (২.৩০)$

প্রাসের বিচরণকাল (T) : উল্লম্ব দিকে সরণ,

$$y = (v_0 \sin\theta) \times t - \frac{1}{2} g t^2$$

ধরা যাক, বিচরণ কাল $= T$

T সময়ে প্রাসটি প্রসঙ্গ সমতলে ফিরে আসে।

অর্থাৎ, T সময়ে, $y = 0$ অর্থাৎ যখন $y = 0$ তখন $t = T$ বসিয়ে পাই,

$$\therefore y = (v_0 \sin\theta) \times t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\text{বা, } 0 = (v_0 \sin\theta) \times T - \frac{1}{2} g T^2$$

$$\text{বা, } \frac{gT^2}{2} = (v_0 \sin\theta) \times T$$

$$\text{বা, } \frac{gT}{2} = v_0 \sin\theta$$

$$\text{বা, } T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

$$\therefore T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} \quad \text{............ ....} \quad (২.৩১)$$

প্রাসের অনুভূমিক পাল্লা (Range) R :

নিক্ষিপ্ত বস্তুটি বা প্রাসটি আদি উচ্চতায় ফিরে আসতে যে অনুভূমিক দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে অনুভূমিক পাল্লা বলে।

নিক্ষিপ্ত বস্তু বা প্রাসের নিক্ষেপের স্থান থেকে ভূ-পৃষ্ঠে ফিরে আসার সময় যে অনুভূমিক দূরত্বে $y = 0$ বিন্দু অতিক্রম করে তাই হচ্ছে অনুভূমিক পাল্লা R । এই শর্ত প্রাসের চলরেখ সমীকরণ

$y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta)^2} x^2$ – এ বসালে x এর যে মান পাওয়া যাবে তাই হবে অনুভূমিক পাল্লা R। সুতরাং, উক্ত সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়, অর্থাৎ যখন $y = 0$ তখন $x = R$ বসালে,

$$y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta)^2} x^2$$

$$\text{বা, } 0 = (\tan\theta)R - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta)^2} R^2$$

$$\text{বা, } R = \tan\theta \times \frac{2(v_0 \cos\theta)^2}{g}$$

$$\text{বা, } R = \frac{2\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{(v_0 \cos\theta)^2}{g} \qquad [\because \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta]$$

$$\text{বা, } R = \frac{2\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{v_0 \cos^2\theta}{g}$$

$$\text{বা, } R = \frac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{g} \quad \text{............. ....} (২.৩২)$$

কিন্তু, $R = 0$ যে মুহূর্তে বস্তুটি নিক্ষেপ করা হয়, সেই দূরত্ব নির্দেশ করে।

$$\therefore R = \frac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{g}$$

সর্বাধিক পাল্লা : নিক্ষিপ্ত বস্তু সর্বাধিক যে অনুভূমিক দূরত্ব অতিক্রম করে আদি উচ্চতায় ফিরে আসে তাকে সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা বলে।

$R = \frac{{v_o}^2 \sin 2\theta}{g}$ থেকে দেখা যায় যে, g ধ্রুবক হওয়ায় এবং আদি বেগ মান v_o স্থির থাকলে অনুভূমিমক পাল্লা বস্তুটির যে কোণে (θ) নিক্ষেপ করা হয়, তার উপর নির্ভর করে। সুতরাং R সর্বাধিক হবে, যখন $\sin 2\theta$ সর্বাধিক হবে। আমরা জানি, $\sin 2\theta$ এর সর্বাধিক মান হতে পারে $+1$ সুতরাং R সর্বাধিক হবে।

যখন $\sin 2\theta = 1$ হবে

বা, $2\theta = 90°$ হবে $\therefore \theta = 45°$ হবে।

অতএব, নির্দিষ্ট বেগে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু বা প্রাস সর্বাধিক অনুভূমিক দূরত্ব অতিক্রম করে যখন বস্তুটি অনুভূমিকের সাথে $45°$ কোণে নিক্ষিপ্ত হয়। এই সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা R_{max} হলে,

$$R_{max} = \frac{{v_o}^2 \sin 90°}{g}$$

বা, $R_{max} = \frac{{v_o}^2 \times 1}{g}$

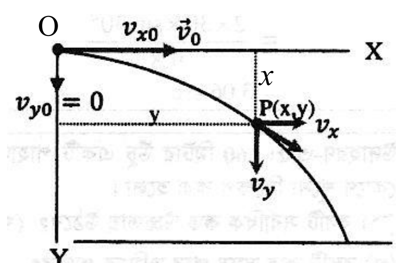
বা, $R_{max} = \frac{{v_o}^2}{g}$

$$\therefore R_{max} = \frac{{v_o}^2}{g} \quad \text{.......... ....(২.৩৩)}$$

কাজ : প্রাস এবং পড়ন্ত বস্তু এক নয়, ভিন্ন- ব্যাখ্যা করুন।

বায়ু মধ্যস্থিত কোনো বিন্দু হতে অনুভূমিক দিকে নিক্ষিপ্ত প্রাসের গতিপথ :

গতিপথের সমীকরণঃ গতিপথ প্রধানত নিক্ষেপন বেগ, নিক্ষেপন কোণ ও অভিকর্ষজ ত্বরণ এর উপর নির্ভরশীল। বায়ুর বাধা গতিকে প্রভাবিত করে। তবে, প্রাসের গতি বিষয়ক আলোচনায় বায়ুর বাধাকে সাধারণত উপেক্ষা করা হয়।



চিত্র : ২.২৩

ধরা যাক, বায়ু মধ্যস্থিত O বিন্দু হতে একটি প্রাসকে অনুভূমিক দিকে নিক্ষেপ করা হলো (চিত্র-২.২৩), O বিন্দুকে মূল বিন্দু ধরা হলো, OX ও OY যথাক্রমে X ও Y অক্ষ।

আদিবেগ $= \vec{v}_o$

g নিচের দিকে ক্রিয়াশীল। অতএব, $a_y = g, a_x = 0$

নিক্ষেপন বিন্দু ও মূল বিন্দু একই হওয়ার কারণে, $x_o = y_o = 0$

আদিবেগের অনুভূমিক উপাংশ, $v_{x_o} = v_o$ .... (২.৩৪)

আদিবেগের উল্লম্ব উপাংশ, $v_{y_o} = 0$ ....(২.৩৫)

ধরা যাক, t সময়ে প্রাসটি $P(x, y)$ অবস্থানে আছে।

অনুভূমিক দিকে ত্বরণ, $a_x = 0$, কাজেই, আদি বেগের অনুভূমিক উপাংশ অপরিবর্তিত থাকবে।

$\therefore x = v_o t$ ....(২.৩৬)

উল্লম্বের দিকে ত্বরণ, $a_y = g$,

$$\therefore y = 0 \times t + \frac{1}{2} g t^2$$

বা, $y = \frac{1}{2}gt^2$ ....(২.৩৭)

(২.৩৬) নং হতে পাই,

$$x = v_o t$$

বা, $t = \frac{x}{v_o}$ .... (২.৩৮)

(২.৩৭) নং ও (২.৩৮) নং সমীকরণ হতে,

$$y = \frac{1}{2}g(\frac{x}{v_o})^2$$

বা, $y = \frac{1}{2}g \times \frac{x^2}{{v_o}^2}$

বা, $y = \frac{gx^2}{2{v_o}^2}$

বা, $x^2 = \frac{2{v_o}^2}{g}y$

ধরা যাক, $\frac{2{v_o}^2}{g} = 4d$ (ধ্রুবক)

বা, $x^2 = \frac{2{v_o}^2}{g}y$

$\therefore\ x^2 = 4dy$ .... (২.৩৯)

উপরের সমীকরণটিও প্যারাবোলা বা পরাবৃত্তের সমীকরণ। অতএব অনুভূমিক দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথও পরাবৃত্ত।

গাণিতিক উদাহরণ ২.৬: একটি ফুটবলকে ভূমির সাথে 30° কোণে $40\ ms^{-1}$ বেগে কিক করা হলো। 2 s পরে ফুটবলের বেগের মান কত হবে, নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করি, যে বিন্দু থেকে ফুটবলটি কিক করা হয় সে বিন্দুটি মূলবিন্দু এবং খাড়া ওপরের দিক Y অক্ষ ধনাত্মক।

এখানে,
নিক্ষেপ কোণ, $\theta_o = 30^\circ$
আদিবেগ, $v_o = 40\ ms^{-1}$
অনুভূমিক ত্বরণ, $a_x = 0$
উল্লম্ব ত্বরণ, $a_y = -9.8\ ms^{-2}$ [নিম্নমুখী বলে]
সময়, $t = 2$ s
বেগ, $v = ?$

শেষ বেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ যথাক্রমে v_x ও v_y হলে আমরা পাই, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ এবং আদিবেগের অনুভূমিক উপাংশ ও উল্লম্ব উপাংশ যথাক্রমে, v_{x_o} ও v_{y_o}

$\therefore\ v_x = v_{x_o} + a_x t$

বা, $v_x = v_o \cos\theta_o + a_x t$

$= 40 \times \cos 30^\circ + 0$

$= 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 34.64\ ms^{-1}$

এবং $v_y = v_o + a_y t$

বা, $v_y = v_o \sin\theta_o + a_y t$

$= 40 \times \sin 30^\circ + (-9.8).2$

$= 40 \times \frac{1}{2} - 19.6$

$= (20 - 19.6) = 0.4\ ms^{-1}$

এখন বেগ, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$= \sqrt{(34.64)^2 + (0.4)^2}$

$= \sqrt{1200.9}$

$= 34.6\ ms^{-1}$

উত্তর: ফুটবলটির বেগের মান $34.6\ ms^{-1}$

গাণিতিক উদাহরণ ২.৭: ভূমি থেকে 5 km উঁচু দিয়ে 300 ms^{-1} বেগে অনুভূমিক বরাবর চলার সময় কোনো বিমান থেকে একটি বস্তু ফেলে দেওয়া হলো। বস্তুটি কত সময় পর এবং কোথায় ভূমিতে পড়বে?

সমাধান: আমরা পাই খাড়া নিচের দিকে অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$y = \frac{1}{2} gt^2$ বা, $t^2 = \frac{2y}{g}$

$\therefore\ t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$

$= \sqrt{\frac{2 \times 5000}{9.8}} = 31.94\ s$

এখানে,
উচ্চতা, $y = 5\ km = 5000\ m$
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8\ ms^{-2}$
সময়, $t = ?$

$\therefore$ অনুভূমিক সরণ, $x = v_{x_o} \times t$

$= 300 \times 31.94$

$= 9582\ m$

$= 9.582\ km$

আবার,
বেগ, $v_{x_o} = 300\ ms^{-1}$
সময়, $t = 31.94\ s$
দূরত্ব, $x = ?$

উত্তর: বোমাটি 31.94 s পরে অনুভূমিক বরাবর 9.582 km দূরে পতিত হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ২.৮: একটি বলকে ভূমির সাথে 30^0 কোণ করে উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলে এটি 20 m দূরে একটি দালানের ছাদে গিয়ে পড়ে। নিক্ষেপ বিন্দু থেকে ছাদের উচ্চতা 5 m হলে বলটি কত বেগে ছোড়া হয়েছিল?

সমাধান: মনে করি, যে বিন্দু থেকে বলটি নিক্ষেপ করা হয় সেটি মূলবিন্দু এবং খাড়া উপরের দিকে Y অক্ষ ধনাত্মক।

আমরা পাই, $y = (\tan \theta_o)\, x - \frac{gx^2}{2(v_o \cos \theta_0)^2}$

বা, $\frac{gx^2}{2(v_o \cos \theta_0)^2} = \tan \theta_o x - y$

বা, $(v_o \cos \theta_o)^2 = \frac{gx^2}{2(\tan \theta_o x - y)}$

বা, $v_o^2 = \frac{gx^2}{2(\tan \theta_o x - y) \times \cos^2 \theta_o}$

$= \frac{9.8 \times (20)^2}{2\{(\tan 30^o).20 - 5\} \times (\cos 30^o)^2}$

$= 399.16$

$\therefore\ v_o = \sqrt{399.16} = 19.97 \approx 20\ ms^{-1}$

এখানে, $x_o = y_o = 0$
অনুভূমিক দূরত্ব, $x = 20\ m$
নিক্ষেপ কোণ, $\theta_o = 30^\circ$
উল্লম্ব দূরত্ব, $y = 5\ m$
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8\ ms^{-2}$
আদিবেগ, $v_o = ?$

উত্তর: বলটি প্রায় 20 ms^{-1} বেগে ছোড়া হয়েছিল।

গাণিতিক উদাহরণ ২.৯: কত কোণে নিক্ষেপ করলে একটি প্রাসের অনুভূমিক পাল্লা তার সর্বাধিক উচ্চতার সমান হবে?

সমাধান: মনে করি, নির্ণের কোণ = θ_o.

আমরা পাই সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \dfrac{v_o^2 \sin^2 \theta_o}{2g}$

অনুভূমিক পাল্লা, $R = \dfrac{v_o^2 \sin^2 \theta_o}{g}$

শর্তমতে, $H = R$

বা, $\dfrac{v_o^2 \sin^2 \theta_o}{2g} = \dfrac{v_o^2 \sin 2\theta_o}{g}$

বা, $\dfrac{\sin^2 \theta_o}{2} = \sin 2\theta_o$

বা, $\sin^2 \theta_o = 2 \sin 2\theta_o$

বা, $\sin^2 \theta_o = 2.2 \sin \theta_o \cos \theta_o$

বা, $\sin \theta_o = 4 \cos \theta_o$

বা, $\dfrac{\sin \theta_o}{\cos \theta_o} = 4$

বা, $\tan \theta_o = 4$

$\therefore \theta_o = \tan^{-1} 4 = 75.96^\circ$

উত্তর: 75.96° কোণে নিক্ষেপ করলে একটি প্রাসের অনুভূমিক পাল্লা তার সর্বাধিক উচ্চতার সমান হবে।

সার-সংক্ষেপ :

- **প্রাস বা প্রক্ষেপক:** কোনো একটি বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে তির্যকভাবে উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলে তাকে প্রাস বা প্রক্ষেপক বলে।
- **নিক্ষেপন কোণ:** নিক্ষেপন বেগ এবং অনুভূমিক তলের মধ্যবর্তী কোণকে নিক্ষেপন কোণ বলে।
- **বিচরণ কাল বা ভ্রমণ কাল:** নিক্ষেপের মুহূর্ত হতে সমতলে ফিরে আসতে নিক্ষিপ্ত বস্তুর যে সময় লাগে তাকে ভ্রমণ কাল বা বিচরণ কাল বলে।
- **পাল্লা:** নিক্ষেপন বিন্দু ও বিচরণ পথের শেষ প্রান্ত বিন্দুর মধ্যবর্তী রৈখিক দূরত্বকে পাল্লা বলে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.৭

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন।

১. একটি ফুটবলকে ভূমির সাথে 45° কোণে 20 ms^{-1} বেগে কিক করা হলো। 1 সেকেন্ড পর বেগের মান কত?

ক. 9.8 ms^{-1} খ. 14.8 ms^{-1} গ. 98 ms^{-1} ঘ. 149 ms^{-1}

২. প্রাসের ত্বরণকে কোনটি দ্বারা প্রকাশ করা হয়?

ক. $\vec{a} = g\hat{i}$ খ. $\vec{a} = -g\hat{i}$ গ. $\vec{a} = -g\hat{j}$ ঘ. $\vec{a} = -g\hat{k}$

৩. প্রাসের গতির বৈশিষ্ট্য হচ্ছে-

i. উল্লম্ব তলে সীমাবদ্ধ ii. দ্বিমাত্রিক iii. গতিপথ অধিবৃত্তাকার

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i খ. ii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

পাঠ-২.৮ বৃত্তীয় গতি
Circular Motion

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সুষম বৃত্তাকার গতি সংক্রান্ত বিভিন্ন রাশি বর্ণনা করতে পারবেন।
- সুষম বৃত্তাকার গতি সংক্রান্ত বিভিন্ন রাশির পারস্পারিক সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন।

২.৮.১ বৃত্তীয় গতি (Circular Motion)

সংজ্ঞা ঃ কোনো বস্তু বা কণা কোনো বিন্দু বা অক্ষকে কেন্দ্র করে বৃত্তপথে আবর্তিত হলে এর গতিকে বৃত্তীয় গতি বলে।

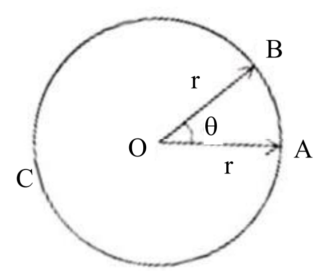
বৃত্তীয় গতি এক ধরনের ঘূর্ণন গতি। ঘূর্ণন যদি কোনো অক্ষকে কেন্দ্র করে সম্পাদিত হয় তাহলে ঐ অক্ষকে ঘূর্ণন অক্ষ (Axis of rotation) বলে। ২.২৪ চিত্রে একটি কণার গতি প্রদর্শিত হলো। কণাটি O বিন্দুকে কেন্দ্র করে ABC বৃত্তপথে আবর্তিত হচ্ছে। বৃত্তীয় গতি সংক্রান্ত কতিপয় রাশি নিম্নে আলোচিত হলো ঃ

ব্যাসার্ধ ভেক্টর :

একটি কণা বৃত্তপথে ঘুরতে থাকলে, কেন্দ্র ও কণার অবস্থানের সংযোগকারী সরল রেখাকে যে ভেক্টর দ্বারা প্রকাশ করা হয় তাকে ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে।

চিত্রে, কণাটি যখন A অবস্থানে তখন এর ব্যাসার্ধ ভেক্টর $\overrightarrow{OA}$। B অবস্থানে ব্যাসার্ধ ভেক্টর $\overrightarrow{OB}$।

ব্যাসার্ধ ভেক্টর মান = ব্যাসার্ধ = r।



চিত্র : ২.২৪

কৌণিক সরণ (Angular displacement): বৃত্তপথে ঘূর্ণরত অবস্থায় একটি কণা একটি নির্দিষ্ট সময়ে বৃত্তের একটি নির্দিষ্ট চাপে পরিভ্রমণ করে। ঐ চাপ কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে কৌণিক সরণ বলে। অন্য কথায়, কণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর একটি নির্দিষ্ট সময়ে যে কোণ অতিক্রম করে তাকে কৌণিক সরণ বলে।

ধরা যাক, t সময়ে একটি কণা A হতে B অবস্থানে যায় [চিত্র ২.২৪]। তাহলে, t সময়ে কণাটির কৌণিক সরণ = $\angle AOB = \theta$। কৌণিক সরণ সাধারণত রেডিয়ানে পরিমাপ করা হয়।

1 রেডিয়ান: কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ সমান দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে এক রেডিয়ান বলে। [1 rad = 57.3^0 (প্রায়)।]

গড় কৌণিক বেগ:

সংজ্ঞা : কোনো বিন্দু বা অক্ষকে কেন্দ্র করে বৃত্তাকার পথে চলমান কোনো বস্তুর যেকোনো সময় ব্যবধানে গড়ে প্রতি একক সময়ে যে কৌণিক সরণ হয় তাকে বস্তুটির গড় কৌণিক বেগ বলে।

ধরা যাক, Δt সময় ব্যবধানে, বৃত্তপথে ঘূর্ণনরত একটি বস্তুর কৌণিক সরণ $\Delta\theta$।

∴ গড় কৌণিক বেগ, $\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

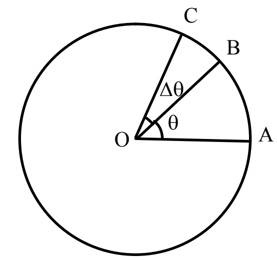
কৌণিক বেগ বা তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ (Angular veiocity or Instantaneous angular velocity) : সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে, সময়ের সাথে বস্তুর কৌণিক সরণের হারকে ঐ মুহূর্তের তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ বলে।

ব্যাখ্যাঃ ধরা যাক, একটি বস্তু বৃত্তপথে ঘূর্ণরত (চিত্র ২.২৫)।

A - বস্তুর আদি অবস্থান

B - t সময়ে বস্তুর অবস্থান

C - $t + \Delta t$ সময়ে বস্তুর অবস্থান



চিত্র : ২.২৫

Δt সময় ব্যবধানে বস্তুটির কৌণিক সরণ $\Delta\theta$।

∴ কৌণিক বেগ, $\omega = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$

একক ঃ কৌণিক বেগের একক হচ্ছে radian/s বা সংক্ষেপে rad/s. বা rad s^{-1};

মাত্রাঃ আমরা জানি, রেডিয়ান পরিমাপে,

$$\text{কোণ} = \frac{\text{বৃত্তচাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}}$$

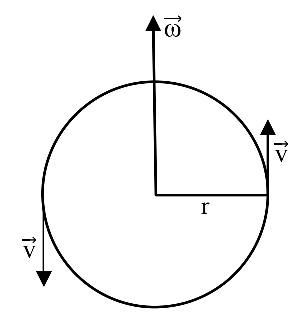
এখন $\omega = \frac{\theta}{t} = \theta \times \frac{1}{t} = \text{কোণ} \times \frac{1}{\text{সময়}} = \frac{\text{বৃত্তচাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}} \times \frac{1}{\text{সময়}}$

∴ কৌণিক বেগের মাত্রা $= \frac{L}{L} \times \frac{1}{T} = \frac{1}{T} = T^{-1}$

পর্যায়কাল (Time period): সম-বৃত্তীয় গতির ক্ষেত্রে, বৃত্তপথ একবার ঘুরে আসতে যে সময় লাগে তাকে পর্যায়কাল বলে। পর্যায়কালকে T দ্বারা সূচিত করা হয়।

কম্পাংক (Frequency): সম-বৃত্তীয় গতির ক্ষেত্রে, প্রতি সেকেণ্ড যতবার পূর্ণ ঘূর্ণন সম্পন্ন হয় তাকে কম্পাংক বলে। কম্পাঙ্ককে f বা υ দ্বারা সূচিত করা হয়।

কম্পাংকের একক হচ্ছে cycle/s বা Hertz (Hz) । 1 cycle/s = 1Hz.



চিত্র : ২.২৬

কম্পাংক ও পর্যায়কালের মধ্যে সম্পর্ক

ধরা যাক, বৃত্তপথে ঘূর্ণনরত একটি কণার পর্যায়কাল $= T$ s;

কণাটি T সেকেণ্ডে ঘুরে 1 বার

” 1 ” ” $\frac{1}{T}$ বার

∴ কম্পাংক, $f = \frac{1}{T}$ .... (২.৪০)

কৌণিক বেগ ও পর্যায়কালের মধ্যে সম্পর্ক

যে কোনো বিন্দুর চারদিকে 2π রেডিয়ান কোণ থাকে। তাই, বৃত্তের পরিধি কেন্দ্রে 2π কোণ উৎপন্ন করে।

ধরা যাক, একটি কণার পর্যায়কাল $= T$ s.

T সেকেন্ড কৌণিক সরণ হয় 2π

1 ” ” ” ” $\frac{2\pi}{T}$

∴ কৌণিক বেগ, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . ... (২.৪১)

কৌণিক বেগ ও কম্পাংকের মধ্যে সম্পর্ক

উপরের সমীকরণ হতে,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \times \frac{1}{T}$$

$$\therefore \omega = 2\pi f \text{ . ...}(২.৪২)$$

আবার, বস্তুটি t সময়ে N সংখ্যক ঘূর্ণন সম্পন্ন করলে $f = \frac{N}{t}$

$$\therefore \omega = \frac{2\pi N}{t} \text{ ....}(২.৪৩)$$

রৈখিক বেগ ও কৌণিক বেগের মধ্যে সম্পর্ক :

ধরা যাক, একটি কণা সম-বৃত্তীয় গতিতে গতিশীল, চিত্র ২.২৬

বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= r$

রৈখিক বেগ $= v$

কৌণিক বেগ $= \omega$

পর্যায় কাল $= T$

বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$

T সেকেন্ডে কণাটি বৃত্তপথ একবার ঘুরে আসে।

অর্থাৎ, T সেকেন্ড কৌণিক সরণ $= 2\pi$;

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T}$$

বা, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .... (২.৪৪)

T সেকেন্ডে কণাটি $2\pi r$ পথ অতিক্রম করে। অর্থাৎ, বৃত্তপথে না ঘুরে সরলরেখায় চলার সুযোগ পেলে কণাটি $2\pi r$ দূরত্ব অতিক্রম করত।

$\therefore$ রৈখিক বেগ, $v = \frac{2\pi r}{T}$

বা, $T = \frac{2\pi r}{v}$ .... (২.৪৫)

(২.৪৩) ও (২.৪৪) হতে, $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v}$

বা, $\frac{1}{\omega} = \frac{r}{v}$

বা, $v = \omega r$ .... (২.৪৬)

সুতরাং, রৈখিক বেগ = কৌণিক বেগ $\times$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

[বিঃ দ্রঃ (১) অসম-বৃত্তীয় গতির ক্ষেত্রেও, যেকোনো অবস্থান বিন্দুতে, $v = \omega r$।

(২) ω ধ্রুবক হলে, $v \propto r$। অর্থাৎ রৈখিক বেগ ঘূর্ণন অক্ষ হতে দূরত্বের সমানুপাতিক। উদাহরণ ঃ আখ -মাড়াই কলে দূরবর্তী গরুকে সর্বাধিক বেগে দৌড়াতে হয়।]

$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\mathbf{r}$ সমীকরণের ভেক্টর রূপ

ধরা যাক, $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ....(২.৪৭)

$\vec{u}$ ভেক্টরের মান, $u = \omega r \sin 90^\circ = \omega r$ [$\because \vec{\omega} \perp \vec{r}$, চিত্র ২.২৬]

ক্রস গুণনের নিয়ম অনুসারে, $\vec{\omega} \times \vec{r}$ বা $\vec{u}$ ভেক্টরের অভিমুখ এবং $\vec{v}$ ভেক্টরের অভিমুখ অভিন্ন। আবার, $v = \omega r$। দেখা যাচ্ছে যে মান ও দিক বিবেচনায়, $\vec{u}$ এবং $\vec{v}$ ভেক্টর অভিন্ন।

$\therefore \vec{u} = \vec{v}$ .... (২.৪৮)

(২.৪৭) ও (২.৪৮) হতে, $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

গড় কৌণিক ত্বরণ (Average angular acceleration): কৌণিক বেগের পরিবর্তন হলে কৌণিক ত্বরণ হয়। যেকোনো সময় ব্যবধানে কোনো বস্তুর গড়ে প্রতি একক সময়ে কৌণিক বেগের যে পরিবর্তন হয় তাকে গড় কৌণিক ত্বরণ বলে। Δt সময় ব্যবধানে কোনো বস্তুর কৌণিক বেগের পরিবর্তন যদি $\Delta\omega$ হয়, তাহলে গড় কৌণিক ত্বরণ,

$$\overline{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \text{.......................................} \quad (২.৪৯)$$

কৌণিক ত্বরণ বা তাৎক্ষণিক কৌণিক ত্বরণ (Angular acceleration or Instantaneous angular acceleration): সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে, সময়ের সাথে বস্তুর কৌণিক বেগের পরিবর্তনের হারকে কৌণিক ত্বরণ বলে। Δt সময়ে কোনো বস্তুর কৌণিক বেগের পরিবর্তন $\Delta\omega$ হলে, কৌণিক ত্বরণ,

$$\alpha = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{.......................................} \quad (২.৫০)$$

একক ঃ কৌণিক ত্বরণের একক হচ্ছে radian/s^2 বা সংক্ষেপে rad/s^2 বা rad s^{-2} ।
মাত্রাঃ কৌণিক ত্বরণের মাত্রা হচ্ছে T^{-2} ।

কোনো বস্তু r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে α সমকৌণিক ত্বরণে ঘুরলে এর রৈখিক ত্বরণ,

$$a = r\alpha \quad \text{.......................................} \quad (২.৫১)$$

গাণিতিক উদাহরণ ২.১০: 8 m ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার পথে একটি গাড়ি ঘণ্টায় 50 km বেগে চলছে। গাড়িটির কৌণিক বেগ নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা পাই, $v = \omega r$

$$\text{বা, } \omega = \frac{v}{r} = \frac{13.89}{8} = 1.74 \text{ rads}^{-1}$$

উত্তর: গাড়িটির কৌণিক বেগ = 1.74 rads^{-1}

এখানে,
গাড়িটির রৈখিক বেগ, $v = 50 \text{ kmh}^{-1} = \frac{50\times1000}{60\times60} \text{ ms}^{-1} = 13.89 \text{ ms}^{-1}$
বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ, $r = 8$ m
গাড়িটির কৌণিক বেগ, ω = ?

সার-সংক্ষেপ :

- **বৃত্তাকার গতি:** কোনো বস্তুকণা যদি কোনো অক্ষ বা বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটি বৃত্তাকার পথে গতিশীল থাকে, তবে বস্তুকণার এই গতিকে বৃত্তাকার গতি বলে।
- **ব্যাসার্ধ ভেক্টর:** বৃত্তপথে ঘূর্ণনরত বস্তুর কেন্দ্র ও কণার মধ্যে সংযোগকারী সরলরেখাকে ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে।
- **কৌণিক সরণ:** কোনো বস্তু কোনো বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘুরার সময় যে কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে উক্ত বস্তুর কৌণিক সরণ বলে।
- **গড় কৌণিক বেগ:** যদি কোনো বস্তুকণা একটি বিন্দুকে কেন্দ্র করে বৃত্তাকার পথে ঘুরে, তাহলে কণাটি যে কোনো সময় ব্যবধানে গড়ে প্রতি একক সময়ে যে কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে তার গড় কৌণিক বেগ বলে।
- **তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ বা কৌণিক বেগ:** সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে কৌণিক সরণের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ বা কৌণিক বেগ বলে।
- **গড় কৌণিক ত্বরণ:** যেকোনো সময় ব্যবধানে কোনো একটি বস্তুর গড়ে প্রতি একক সময়ে কৌণিক বেগ পরিবর্তনের হারকে গড় কৌণিক ত্বরণ বলে।

- **তাৎক্ষণিক কৌণিক ত্বরণ বা কৌণিক ত্বরণ:** সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সাথে বস্তুর কৌণিক বেগের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক কৌণিক ত্বরণ বা কৌণিক ত্বরণ বলে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.৮

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন।

১. কোনো কণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর নির্দিষ্ট সময়ে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে কী বলে?

ক. কৌণিক সরণ খ. রৈখিক সরণ গ. কৌণিক বেগ ঘ. রৈখিক দ্রুতি

২. কৌণিক বেগের একক কী?

ক. m/s খ. cm/s গ. rad/s ঘ. rad/hr

৩. কৌণিক বেগ ও পর্যায়কালের মধ্যে সঠিক সম্পর্ক নিচের কোনটি?

ক. $\omega = \frac{\pi}{T}$ খ. $\omega = \frac{2\pi}{T}$ গ. $\omega = \frac{T}{\pi}$ ঘ. $\omega = \frac{T}{2\pi}$

৪. কৌণিক বেগ ও রৈখিক বেগের মধ্যে সম্পর্ক কোনটি?

ক. $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ খ. $v = r \times \omega$ গ. $\vec{\omega} = \vec{v} \times \vec{r}$ ঘ. $\omega = v \times r$

পাঠ-২.৯ কেন্দ্রমুখী ত্বরণ
Centripetal Acceleration

উদ্দেশ্য

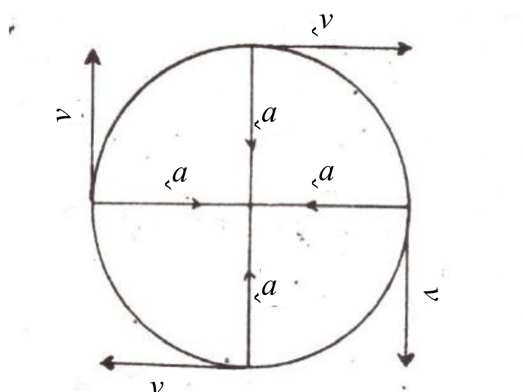
এ পাঠ শেষে আপনি-

- সুষম বৃত্তাকার গতিতে বস্তুর, ত্বরণ কেন থাকে তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- সুষম বৃত্তাকার গতির ক্ষেত্রে বস্তুর কেন্দ্রমুখী ত্বরণ নির্ণয় করতে পারবেন।

সুষম বৃত্তাকার গতি এবং কেন্দ্রমুখী ত্বরণ:
(Uniform Circular Motion and Centripetal Acceleration):

সমদ্রুতিতে বৃত্তাকার পথে কোনো বস্তু ঘুরতে থাকলে ঐ বস্তুর গতিকে সুষম বৃত্তাকার গতি বলে। সমদ্রুতিতে সরল পথে কোনো বস্তু চলতে থাকলে তার কোনো ত্বরণ থাকে না; কিন্তু সমদ্রুতিতে বৃত্তাকার পথে কোনো বস্তু ঘুরতে থাকলে তার ত্বরণ থাকে। নিম্নে তার ব্যাখ্যা প্রদান করা হলো –

আমরা জানি, বেগ একটি ভেক্টর রাশি। কাজেই তার মান অথবা দিক বা উভয়েরই পরিবর্তনের সাথে সাথে পরিবর্তিত হয়। কোনো বস্তু সমদ্রুতিতে সরল পথে চলতে থাকলে তার গতির মান ও দিক উভয়েই অপরিবর্তিত থাকে। অর্থাৎ বেগ অপরিবর্তিত থাকে। কাজেই সে ক্ষেত্রে কোনো ত্বরণের সৃষ্টি হয় না। পক্ষান্তরে, সমদ্রুতিতে বৃত্তাকার পথে কোনো বস্তু ঘুরতে থাকলে তার ত্বরণ থাকে। কারণ সেক্ষেত্রে বস্তুটি সমদ্রুতিতে চলতে থাকায় তার বেগের মান অপরিবর্তিত থাকে কিন্তু বেগের দিক পরিবর্তিত থাকে (চিত্র-২.২৭)। কেননা বৃত্তাকার পথের কোনো বিন্দুতে বেগের দিক বৃত্তের পরিধির ওপর ঐ বিন্দুতে অংঙ্কিত স্পর্শক বরাবর। কাজেই বিভিন্ন বিন্দুতে স্পর্শকের অভিমুখ বিভিন্ন, তাই প্রতিনিয়ত বেগের দিক পরিবর্তিত হচ্ছে। অর্থাৎ, বেগ পরিবর্তিত হতে থাকে। কাজেই ত্বরণের সৃষ্টি হয়। একেই কেন্দ্রমুখী ত্বরণ বলা হয়।



চিত্র : ২.২৭

অতএব, বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তুর উপর কেন্দ্রমুখী বলের জন্য বৃত্তের ব্যাসার্ধ বরাবর কেন্দ্রের দিকে যে ত্বরণের সৃষ্টি হয় তাকে লম্ব ত্বরণ বা ব্যাসার্ধমুখী ত্বরণ বা কেন্দ্রমুখী ত্বরণ বলে।

কেন্দ্রমুখী ত্বরণের মানঃ ধরা যাক, একটি কণা একটি বৃত্তপথে সমদ্রুতিতে আবর্তনরত (চিত্রঃ ২.২৮)।

বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= r$

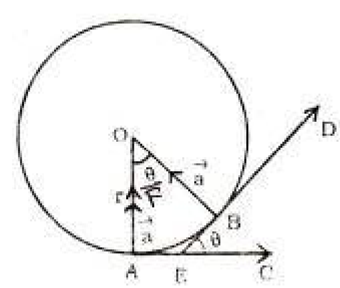
কণার সমদ্রুতি $= v$

ধরা যাক, কোনো এক মুহূর্তে কণাটি A অবস্থানে আছে। অতি ক্ষুদ্র সময় t পরে কণাটি B অবস্থানে পৌছায়। A অবস্থঅনে এর বেগ স্পর্শক AC বরাবর। B অবস্থানে বেগ স্পর্শক BD বরাবর। AC ও BD এর মিলনবিন্দু হচ্ছে E

$OAEB$ চতুর্ভুজে

$\angle AOB + \angle AEB = 2$ সমকোণ

আবার, $\angle BEC + \angle AEB = 2$ সমকোণ



চিত্রঃ ২.২৮

$\therefore \angle BEC + \angle AOB = \theta$;

B বিন্দুতে কণাটির যে বেগ তাকে দুটি উপাংশ বিভক্ত করা যেতে পারে।

AC এর সমান্তরাল দিকে উপাংশ, $v_x = v\cos\theta$

AO এর সমান্তরাল দিকে উপাংশ, $v_y = v\sin\theta$

t সময়ান্তরটি অতি ক্ষুদ্র। তাই, θ কোণটি অতি ক্ষুদ্র এবং B ও A বিন্দুতে অতি নিকটবর্তী।

আমারা জানি, θ অতি ক্ষুদ্র হলে, $\cos\theta = 1$ এবং $\sin\theta = \theta$ (রেডিয়ান এককে)

$\therefore B$ অবস্থানে, $v_x = v, v_y = v\theta$

আবার, A অবস্থানে, $v_x = v, v_y = 0$

অর্থাৎ, A অবস্থান হতে B অবস্থানে গেলে

v_x এর পরিবর্তন $= 0$

v_y এর পরিবর্তন $= v\theta$

দেখা যাচ্ছে যে, AC বরাবর বেগের কোনো পরিবর্তন নেই, অর্থাৎ, কোনো ত্বরণ নেই। AO বরাবর বেগের পরিবর্তন $v\theta$ । অতএব, AO বরাবর ত্বরণ আছে এবং এর মান $= \frac{v\theta}{t}$ ।

$\therefore$ কেন্দ্রমুখী ত্বরণ, $a = \frac{v\theta}{t} = v\omega = v \times \frac{v}{r} = \frac{v^2}{r}$

বা, $a = \frac{v^2}{r}$ .... (২.৫২)

আবার, $v = \omega r$

$\therefore a = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r$

বা, $a = \omega^2 r$ .... (২.৫৩)

গাণিতিক উদাহরণ ২.১১ঃ একটি বস্তু 40 cm ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে প্রতি মিনিটে 45 বার আবর্তন করে। এর কেন্দ্রমুখী ত্বরণ কত?

এখানে,
সময়, $t = 1$ min $= 60$ s
আবর্তন সংখ্যা, $N = 45$ বার
ব্যাসার্ধ, $r = 40$ cm $= 0.4$ m
কেন্দ্রমুখী ত্বরণ, a = ?

সমাধানঃ আমরা পাই কৌণিক বেগ, $\omega = \frac{2\pi N}{t}$

$$= \frac{2\pi \times 45}{60}$$
$$= \frac{3\pi}{2}$$
$$= \frac{3}{2} \times 3.14 = 4.71 \text{ rads}^{-1}$$

আমরা পাই কেন্দ্রমুখী ত্বরণ, $a = \omega^2 r$

$$= (4.71)^2 \times 0.40$$
$$= 8.87 \text{ ms}^{-2}$$

উত্তরঃ কেন্দ্রমুখী ত্বরণ 8.87 ms^{-2}

সার-সংক্ষেপ :

- **সুষম বৃত্তাকার গতি:** বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তুকণার গতিকে সুষম বৃত্তাকার গতি বলে।
- **কেন্দ্রমুখী বা অভিলম্ব ত্বরণ:** কোনো বস্তুকণা যখন বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে তখন বৃত্তের ব্যসার্ধ বরাবর এবং কেন্দ্রের অভিমুখে বস্তুকণার উপর যে ত্বরণ ক্রিয়া করে তাকে কেন্দ্রমুখী বা অভিলম্ব ত্বরণ বলে। $a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.৯

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন:
সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন।

১. কৌণিক ত্বরণের একক কী?
ক. m/s^2 খ. ms^{-2} গ. rad/s^2 ঘ. rad/s

২. হাইড্রোজেন পরমাণুর ইলেকট্রন নিউক্লিয়াসকে কেন্দ্র করে 5.2×10^{-11}m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার কক্ষপথে $2.20\times10^{6}ms^{-1}$ বেগে ঘুরলে এর কেন্দ্রমুখী ত্বরণ কত?
ক. $9.31 \times 10^{22}\ ms^{-2}$ খ. $9.13 \times 10^{22}\ ms^{-2}$
গ. $3.19 \times 10^{22}\ ms^{-2}$ ঘ. $1.93 \times 10^{22}\ ms^{-2}$

৩. একটি গাড়ি r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে $36\ kmh^{-1}$ সমদ্রুতিতে চলছে। এর কেন্দ্রমুখী ত্বরণ $1\ ms^{-2}$ হলে r এর মান কত?
ক. 50 m খ. 100 m গ. 150 m ঘ. 200 m

৪. m ভরের কোনো বস্তুকণা r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে v দ্রুতিতে ঘূর্ণায়মান থাকলে এর ওপর ক্রিয়ারত কেন্দ্রমুখী বলের মান কত হবে?
ক. $\frac{mv}{r}$ খ. $\frac{mv}{r^2}$ গ. $\frac{mv^2}{r^2}$ ঘ. $\frac{mv^2}{r}$

৫. বৃত্তাপথে কণার যেকোনো অবস্থানে কেন্দ্রমুখী ত্বরণ-
i. কেন্দ্র হতে বহির্মুখে ক্রিয়া করে
ii. ব্যাসার্ধ বরাবর ক্রিয়া করে
iii. কণার রৈখিক বেগের অভিমুখের সাথে লম্বভাবে ক্রিয়া করে
নিচের কোনটি সঠিক?
ক. i ও ii খ. i ও iii গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

পাঠ-২.১০ ব্যবহারিক-১ ঃ স্ফেরোমিটার ব্যবহার করে গোলীয় তলের বক্রতার ব্যাসার্ধ নির্ণয়।

Determination of Radius of Curvature of Spherical Surface Using Spherometer

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- স্ফেরোমিটার ব্যবহার করে গোলীয় তলের বক্রতার ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে পারবেন।

তত্ত্ব (Theory): কোনো বক্রতল যে গোলকের অংশবিশেষ, ঐ গোলকের ব্যাসার্ধকে তার বক্রতার ব্যাসার্ধ বলে। যদি কোনো গোলীয় তলের বক্রতার ব্যাসার্ধ R হয় তবে, $R = \frac{d^2}{6h} + \frac{h}{2}$

এখানে, $d =$ স্ফেরোমিটারের যেকোনো দুই পায়ের মধ্যবর্তী গড় দূরত্ব।

$h =$ বক্রতল স্পর্শ করানোর জন্য স্ফেরোমিটারের স্ক্রুকে যে দূরত্ব ওঠাতে বা নামাতে হয়।

স্ফেরোমিটারের পাঠ (h) =(বৃত্তাকার স্কেলের পূর্ণ ঘূর্ণনসংখ্যা×পিচ)+(বৃত্তাকার স্কেলের অতিরিক্ত ভাগ সংখ্যা×লঘিষ্ঠ ধ্রুব)

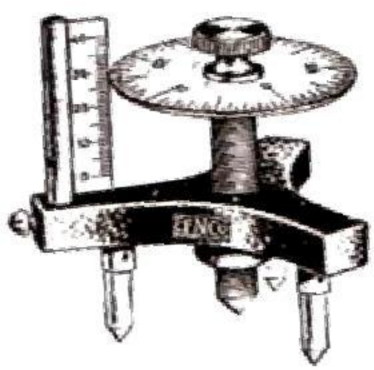
পিচ = স্ক্রুকে একবার সম্পূর্ণ ঘুরালে বৃত্তাকার স্কেল রৈখিক স্কেল বরাবর যে দূরত্ব অতিক্রম করে।

$$\text{লঘিষ্ঠ ধ্রুবক} = \frac{\text{পিচ}}{\text{বৃত্তাকার স্কেলের ভাগ সংখ্যা}}$$

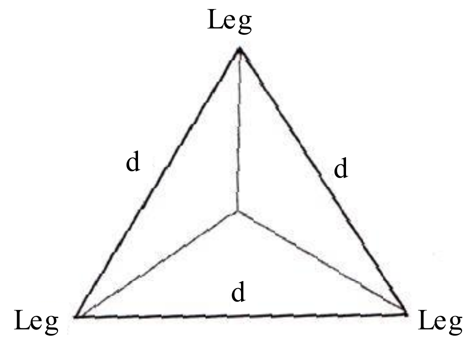
যন্ত্রপাতি (Apparatus): স্ফেরোমিটার, সমতল কাচপাত, পরীক্ষণীয় উত্তল বা অবতল পৃষ্ঠ।

যন্ত্রের বর্ণনা (Description of the Instrument):

স্ফেরোমিটার একটি বিশেষ ধরনের যন্ত্র যার দ্বারা অবতল বা উত্তল পৃষ্ঠের বক্রতার ব্যাসার্ধ এবং পাতলা পাতের বেধ মাপা যায়। স্ফেরোমিটার দেখতে অন্যরূপ হলেও তার মূলনীতি ও স্ক্রুগজের মূলনীতি একই। তিনটি সমান বাহুবিশিষ্ট একটি ধাতব ফ্রেমের তিনটি প্রান্তে তিনটি সমান পা লম্বভাবে সংলগ্ন রয়েছে (চিত্র ২.২৯)। ধাতব ফ্রেমটি তিনটি পায়ের উপর ভর করে ভূমির সাথে সমান্তরালভাবে দণ্ডায়মান রয়েছে। এ ফ্রেমের মধ্যস্থল হতে একটি প্যাঁচকাটা দণ্ড উপর-নিচে যাতায়াত করে। এ দণ্ডটির নাম স্ক্রু। স্ক্রুর নিম্নপ্রান্ত উপর্যুক্ত সমবাহু ত্রিভুজের কেন্দ্রবিন্দু স্পর্শ করতে পারে (চিত্র ২.৩০)। স্ক্রুর উপর প্রান্তে একটি গোলাকৃতি স্কেল আটকানো আছে। এর পরিধি কতগুলো সমান সংখ্যক ভাগে বিভক্ত। গোলাকৃতি স্কেলের উপর একটি টুপি আছে, যা দ্বারা স্ক্রুটিকে এবং সঙ্গে সঙ্গে গোলাকৃতি স্কেলটি ঘুরিয়ে উপর নিচে চালানো যেতে পারে। গোলাকৃতি স্কেলটি আর একটি খাড়া রৈখিক স্কেল এর গা বেয়ে চলাচল করে। রৈখিক স্কেল মিলিমিটার দাগাঙ্কিত।



চিত্র ২.২৯



চিত্র ২.৩০

কাজের ধারা (Working Procedures):

১। প্রথমে স্ফেরোমিটারের রৈখিক স্কেলের ক্ষুদ্রতম ভাগের মান এবং বৃত্তাকার স্কেলের মোট ভাগ সংখ্যা দেখে নিন।

২। এরপর স্ফেরোমিটারের পিচকে বৃত্তাকার স্কেলের মোট ভাগ সংখ্যা দ্বারা ভাগ করে লঘিষ্ঠ ধ্রুবক নির্ণয় করুন।

৩। এবার স্ফেরোমিটারের স্ক্রুটিকে ঘুরিয়ে উপরে তুলে বা নিচে নামিয়ে পরীক্ষণীয় বস্তুর উপর স্থাপন করে স্ক্রুটিকে ধীরে ধীরে বক্রতলের সাথে স্পর্শ করান। স্ক্রু এবং কাচপাতের মাঝখানে এক টুকরা পাতলা কাগজ প্রবেশ করিয়ে দেখে নিন স্ক্রুটি কাচপাতকে স্পর্শ করেছে কিনা। এ অবস্থঅয় বৃত্তাকার স্কেলের যে দাগ রৈখিক স্কেল স্পর্শ করে আছে সেই সংখ্যা (a) দেখে নিন।

৪। এর স্ফেরোমিটারটিকে সমতল কাচপাতের উপর রেখে বৃত্তাকার স্কেলটিকে ঘুরিয়ে স্ক্রুটিকে সমতল কাচপাতের গায়ে আলতোভাবে স্পর্শ করান। বৃত্তাকার স্কেলটি ঘুরার সময় এর আদি পাঠসূচক দাগটি (a) যখন রৈখিক স্কেলটিকে অতিক্রম করে তখন বৃত্তাকার স্কেলটি একবার পূর্ণ ঘূর্ণন সম্পন্ন করে। স্ক্রুর প্রান্ত সমতল কাচপাত স্পর্শ করার পূর্বে বৃত্তাকার স্কেল কয়টি পূর্ণ ঘূর্ণন (m) সম্পন্ন করে তা দেখে নিন। এ অবস্থায় বৃত্তাকার স্কেলের যে দাগ রৈখিক স্কেল স্পর্শ করে আছে সেই সংখ্যা (b) দেখে নিন।

৫। স্ফেরোমিটারটিকে পরীক্ষণীয় তল এবং কাচপাতের উপর রেখে কার্যপদ্ধতি ৩ এবং ৪ কয়েকবার পুনরাবৃত্তি করুন।

৬। এবার স্ফেরোমিটারটিকে একটি সাদা কাগজের উপর রেখে একটু চাপ দিয়ে কাগজের উপর এর তিন পায়ের ছাপ ফেলুন। সমান দূরত্বের যে কোন দুটি পায়ের মধ্যবর্তী দূরত্বই হলো (d)। এভাবে তিনটি দূরত্ব মেপে গড় d নির্ণয় করুন।

৭। প্রাপ্ত উপাত্তসমূহ ছকে বসিয়ে প্রয়োজনীয় হিসাবের সাহায্যে পরীক্ষণীয় গোলীয় তলের বক্রতার ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

পরীক্ষালব্ধ উপাত্ত (Experimental Data)

১। রৈখিক স্কেলের ক্ষুদ্রতম এক ঘরের মান=

২। বৃত্তাকার স্কেলের মোট ভাগ সংখ্যা=

৩। পিচ=

৪। লঘিষ্ঠ ধ্রুব $= \dfrac{\text{পিচ}}{\text{বৃত্তাকার স্কেলের ভাগ সংখ্যা}}$

৫। স্ফেরোমিটারের যে কোনো দুটি পায়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব (১) d_1

(২) d_2

(৩) d_3

গড় দূরত্ব, $d = \dfrac{d_1 + d_2 + d_3}{3}$

বক্রতার ব্যাসার্ধ নির্ণয়ের ছক (অবতল তলের জন্য)

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	উত্তল তলের উপর বৃত্তাকার স্কেলের পাঠ a	বৃত্তাকার স্কেলের পূর্ণ ঘূর্ণন সংখ্যা m	সমতল কাচপাতের উপর বৃত্তাকার স্কেলের পাঠ b	বৃত্তাকার স্কেলের অতিরিক্ত ভাগ সংখ্যা $n=(b-a)$	লঘিষ্ঠ ধ্রুব L.C(mm)	$h=(m\times$পিচ$)$ $+(n\times L.C)$ (mm)	গড় h	বক্রতার ব্যাসার্ধ R (mm)
১.								
২.								
৩.								
৪.								
৫.								

বি.দ্র. যদি b-a এর মান ঋণাত্মক (Negative) আসে তবে হিসাব এভাবে করতে হবে, n=(b-a)+ বৃত্তাকার স্কেলের মোট ভাগ সংখ্যা।

হিসাব: বক্রতার ব্যাসার্ধ, $R=\dfrac{d^2}{6h}+\dfrac{h}{2}=$..........m

ফলাফল: প্রদত্ত গোলীয় তলের বক্রতার ব্যাসার্ধ, $R=$..........m

সতর্কতা (Precaution):

১. পাঠ নেয়ার সময় লম্বন ত্রুটি পরিহার করুন।
২. পিছট ত্রুটি ও শূন্যরেখা ত্রুটি পরিহার করুন।
৩. পাঠ নেয়ার সময় স্ফেরোমিটারের তিনটি পা ও স্ক্রুর অগ্রভাগ যেন সমতলে ও বক্রতলে যেন স্পর্শ করে, সে জন্য কাগজ ব্যবহার করে যাচাই করুন।

পাঠ-২.১১ ব্যবহারিক-২ ঃ নিক্তির সাহায্যে দোল পদ্ধতিতে বস্তুর ভর নির্ণয়।
Determination of Mass of Matter

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- নিক্তির সাহায্যে দোল পদ্ধতিতে বস্তুর ভর নির্ণয় করতে পারবেন।

তত্ত্ব (Theory):

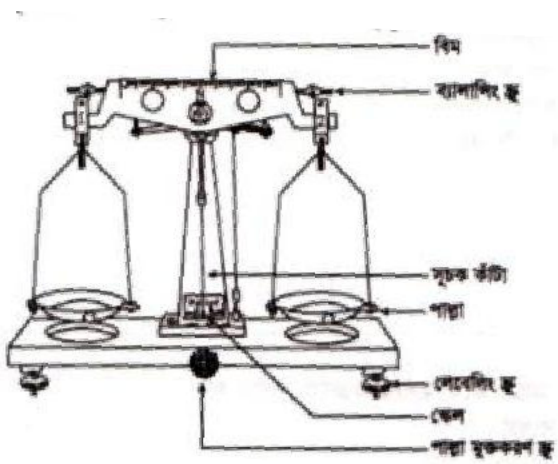
যখন নিক্তি দণ্ডকে স্ক্রু ঘুরিয়ে উপরে তোলা হয় তখন সূচক কাঁটাটি ডানে বামে দুলতে থাকে। স্থিতি অবস্থায় আসতে কাঁটাটি অনেক সময় নেয় তাই দোলন পদ্ধতিতে সূচক কাঁটার স্থিতি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করে পরীক্ষণীয় বস্তুর সঠিক ভর বের করা হয়। ধরা যাক, নিক্তির উভয় পাল্লায় কোনো বস্তু বা বাটখারা না থাকা অবস্থায় স্থিতিবিন্দু P। এবার বাম পাল্লায় বস্তু এবং ডান পাল্লায় W ওজন থাকা অবস্থায় নতুন স্থিতিবিন্দু Q। পুনরায় বাম পাল্লায় বস্তু এবং ডান পাল্লায় W+10mg ওজন থাকা অবস্থায় স্থিতিবিন্দু R। এক্ষেত্রে ওজন বৃদ্ধির জন্য স্থিতি বিন্দুর অবস্থানের পরিবর্তন হয় (Q-R) সংখ্যক দাগ।

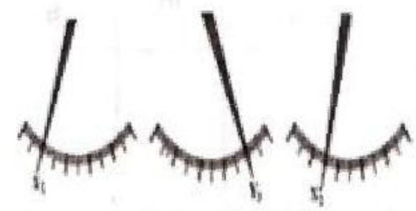
তাহলে, স্থিতি বিন্দুর অবস্থান (Q-R) ঘর সরানোর জন্য ওজনের পরিবর্তন = 10 mg

স্থিতি বিন্দুর অবস্থান এক ঘর সরানোর জন্য ওজনের পরিবর্তন $= \dfrac{10}{(Q-R)}\ \text{mg} = \dfrac{10}{(Q-R)\times 100}\ \text{g}$

সুতরাং স্থিতি বিন্দুর অবস্থান (Q-P) ঘর সরানোর জন্য ওজনের পরিবর্তন $= \dfrac{(P-Q)}{(Q-R)\times 100}\ \text{g}$

সুতরাং বস্তুর প্রকৃত ওজন, $W_r = W + \dfrac{(Q-P)}{(Q-R)\times 100}\ \text{g}$ ....(১)





যন্ত্রপাতি (Apparatus):

১. সূচক নিক্তি
২. ওজন বক্স
৩. পরীক্ষণীয় বস্তু

কার্য পদ্ধতি (Working Procedures):

১. প্রথমে স্পিরিট লেভেল দ্বারা নিক্তি আনুভূমিক আছে কিনা দেখে নিন। না থাকলে নিক্তির নিচে লাগানো স্ক্রু ঘুরিয়ে আনুভূমিক করে নিন।
২. পাল্লাগুলো শুকনা কাপড় বা টিস্যু পেপার দিয়ে মুছে নিন।
৩. নিক্তির দণ্ডকে স্ক্রুর সাহায্যে এমনভাবে উপরে উঠান যেন সূচক কাঁটাটি মুক্তভাবে স্কেল বরাবর দুলতে পারে।
৪. এবার স্থির বিন্দু বের করার জন্য প্রথমে সূচক কাঁটাকে দুলতে দাও। এবার একটি পূর্ণ দোলনের জন্য সূচক কাঁটার বাম দিকে স্কেলের যে দাগ পর্যন্ত আসে তার জন্য দুটি পাঠ ও ডান দিকে সূচক কাঁটা স্কেলের যে দাগ যে পর্যন্ত যায় তার জন্য একটি পাঠ নিন। বাম দিকের পাঠগুলো X_1 ও X_2 হলে এবং ডান দিকের পাঠ Y_1 হলে স্থির বিন্দু হবে,

$$\text{স্থির বিন্দু } P = \frac{\frac{X_1 + X_2}{2} + Y_1}{2}$$

৫. এরপর পরীক্ষণীয় বস্তুকে নিক্তির বাম পাল্লায় রাখ। ডান পাল্লায় ধীরে ধীরে বস্তুর সমপরিমাণ বাটখারা এমনভাবে রাখ যাতে সূচক কাঁটা শূন্য দাগের কাছে থাকে। এই অবস্থায় বস্তুর ভর নির্ণয় করো। এ ভরের জন্য ৪নং কার্য নির্দেশনা অনুসরণ করে পুনরায় স্থির বিন্দু নির্ণয় করুন।
৬. এবার ডান পাল্লায় ভরযুক্ত করো। এ ভরের জন্য ৪নং নির্দেশনা অনুযায়ী স্থির বিন্দু নির্ণয় করুন।
৭. পরিশেষে ১নং সমীকরণ অনুযায়ী পরীক্ষণীয় বস্তুর প্রকৃত ভর নির্ণয় করুন।

স্থির বিন্দু এবং বস্তুর ভর নির্ণয়

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা		বাম পাল্লায় ভর mg	সূচকের পাঠ			স্থির বিন্দু= $\frac{\frac{X_1+X_2}{2}+Y_1}{2}$	গড় স্থির বিন্দু	বস্তুর প্রকৃত ভর $W_r = W + \frac{Q-P}{100(Q-R)}$ g
			বাম দিক X_1 cm	ডান দিক Y_1 cm	বাম দিক X_2 cm			
1	1 2 3	0					P=	

2	1 2 3	W					Q=	
3	1 2 3	W+10					R=	

হিসাব (Calculation): $W_r = W + \dfrac{Q-P}{100(Q-R)}$ সমীকরণে ডান পাশের রাশিগুলোর মান বসিয়ে বস্তুর ভর নির্ণয় করুন।

ফলাফল (Result): পরীক্ষণীয় বস্তুর ভর = ...

ফলাফল বিশ্লেষণ (Result Analysis): ....

সাবধানতা (Precaution):

১. পাল্লায় ভর দেবার পূর্বে পাল্লা স্ক্রু দিয়ে নিচে নামিয়ে স্থির করে নিতে হয়।
২. পাল্লায় বাটখারা এবং ভর দেয়ার সময় চিমটের সাহায্য নিতে হয়।
৩. বস্তুকে সবসময় বাম পাল্লায় রাখতে হয়।
৪. কাজ করার সময় নিক্তিকে বায়ু প্রবাহ থেকে মুক্ত রাখতে হয়।

চূড়ান্ড় মূল্যায়ন

ক. সাধারণ বহুনির্বাচনী প্রশ্ন ঃ

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন।

১। সময়ের ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে বস্তুর সরণের হারকে কী বলা হয়?

(ক) গড়বেগ (খ) তাৎক্ষণিক বেগ (গ) সুষম বেগ (ঘ) অসম বেগ

২। একটি ঘড়ির সেকেন্ডের কাঁটার কৌণিক বেগ কত?

(ক) π rads^{-1} (খ) $\frac{\pi}{3}$ rads^{-1} (গ) $\frac{\pi}{2}$ rads^{-1} (ঘ) $\frac{\pi}{30}$ rads^{-1}

৩। নিক্ষেপণ কোণের নিম্নোক্ত কোন মানের জন্য পাল্লার মান সর্বাধিক হয়?

(ক) 30° (খ) 45° (গ) 60° (ঘ) 90°

খ. বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনী প্রশ্ন ঃ

১। পড়ন্ত বস্তুর সূত্র গুলো যে বস্তুর জন্য প্রযোজ্য সেগুলো-

i. স্থির অবস্থান থেকে পড়বে
ii. কোনো আদিবেগ থাকবে না
iii. বিনা বাধায় মুক্তভাবে পড়বে

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

২। প্রাসের গতিপথ নির্ভর করে-

i. নিক্ষেপণ বেগের ওপর
ii. নিক্ষেপণ কোণের ওপর

iii. অভিকর্ষজ ত্বরণের ওপর

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

গ. অভিন্ন তথ্য ভিত্তিক বহু নির্বাচনী প্রশ্ন ঃ

নিচের উদ্দীপকটি পড়ুন এবং ১-২ নম্বর প্রশ্নের সঠিক উত্তরটিতে টিক দিন।

একটি প্রাসের অনুভূমিক পাল্লা 79.53 m এবং বিচরণকাল 5.3s।

১। প্রাসটি কত সময়ে সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠবে ?

(ক) 1.65 s (খ) 2.65 s (গ) 3.65 s (ঘ) 4.65 s

২। প্রাসটির-

i. নিক্ষেপণ বেগ 30 ms^{-1}

ii. নিক্ষেপণ কোণ 60°

iii. সর্বোচ্চ উচ্চতা 34.44 m

নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

ঘ. সৃজনশীল প্রশ্ন ঃ

১। ক্রিকেট প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহণ করে ক্রিকেট খেলার সময় একজন ব্যাটসম্যান তার ব্যাট দ্বারা একটি ক্রিকেট বলকে আঘাত করে বলটিকে $20\,ms^{-1}$ বেগে ভূমির সাথে $35°$ কোণ করে উপরে পাঠিয়ে দিল। কিন্তু বাউন্ডারী লাইনের কাছে থাকা বিপক্ষ দলের একজন ফিল্ডার বলটিকে ভূমিতে পড়ার পূর্বেই ভূমি থেকে 1.5m উঁচু থেকে বলটি ধরে ফেলল।

ক) পাল্লা কী? ১

খ) উপরের দিকে ঢিল ছুড়লে পৃথিবীতে ফিরে আসে কেন? ২

গ) উদ্দীপকে বলটি সর্বাধিক কত উচ্চতায় উঠবে? ৩

ঘ) ফিল্ডার বলটিকে ধরার সময় বলটি কত অনুভূমিক দূরত্ব অতিক্রম করেছিল? ৪

২। একটি বাস স্থিরাবস্থা থেকে $2\,ms^{-2}$ সমত্বরণে চলতে শুরু করেছে দেখে বাসটি ধরার উদ্দেশ্যে $25m$ পিছনে থাকা একজন লোক $10ms^{-1}$ বেগে দৌড় দিলেন।

ক) গতি কাকে বলে? ১

খ) সময়-বেগ লেখচিত্র হতে গড় ত্বরণ কিভাবে পাওয়া যায় ব্যাখ্যা করুন। ২

গ) $10\,s$ পর বাসটির বেগ নির্ণয় করুন। ৩

ঘ) লোকটির উদ্দেশ্য সফল হয়েছিল কি-না এবং তিনি যদি আরও পিছনে থাকতেন তাহলে কী ঘটতো গাণিতিক যুক্তি দিয়ে মতামত দিন। ৪

ঙ. সংক্ষিপ্ত উত্তর প্রশ্ন ঃ

১। জড় প্রসঙ্গ কাঠামো কী? এর প্রয়োজনীয়তা উল্লেখ করুন।

২। তাৎক্ষনিক বেগ, গড়বেগ, আপেক্ষিক বেগের সংজ্ঞা দিন।

৩। গড়বেগ থেকে কীভাবে তাৎক্ষনিক বেগ নির্ণয় করা যায়- ব্যাখ্যা করুন।

৪। বেগ-সময় লেখ থেকে কীভাবে ত্বরণ নির্ণয় করা যায়, লিখুন।

৫। প্রাস কী, লিখুন।

৬। পড়ন্ত বস্তুর সূত্রগুলো বিবৃত করুন।

৭। পর্যায়কাল ও কম্পাঙ্ক বলতে কী বুঝেন? এদের মধ্যে সম্পর্ক কী, লিখুন।
৮। রৈখিক বেগ ও কৌণিক বেগের মধ্যে সম্পর্ক কী, লিখুন।

চ. বিশদ উত্তর প্রশ্ন ঃ

১। বেগ বনাম সময় লেখচিত্র থেকে প্রমাণ করুন $S = v_o t + \frac{1}{2}at^2$ ।

২। প্রাসের গতিপথ প্যারাবোলা-প্রতিপাদন করুন।

৩। প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতা, পাল্লা, সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছাতে সময় নির্ণয় করুন।

৪। কেন্দ্রমুখী ত্বরণ কী, এর রাশিমালা প্রতিপাদন করুন।

৫। প্রমাণ করুন $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

ছ. গাণিতিক সমস্যাবলি:

১। $196\,\mathrm{ms}^{-1}$ বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বাধিক উচ্চতা, বিচরনকাল, সর্বাধিক উচ্চতায় উঠার সময়, পতনের সময়, 20 s পরে বেগ নির্ণয় কর।

২। 98 m উঁচু স্থান হতে একটি বস্তুকে নিচে ফেলা হয় এবং একই সময় অপর একটি বস্তুকে $24.5\ \mathrm{ms}^{-1}$ বেগে খাড়া উপরে নিক্ষেপ করলে কখন ও কোথায় উহারা মিলিত হবে?

৩। অনুভূমিকের সাথে $30°$ কোণ করে ভূ-পৃষ্ঠ থেকে $50\ \mathrm{ms}^{-1}$ বেগে একটি বুলেট ছোঁড়া হল। বুলেটটি 50 m দূরে অবস্থিত একটি দেয়ালকে কত উচ্চতায় আঘাত করবে?

৪। একটি প্রাসের অনুভূমিক পাল্লা 79.53 m এবং বিচরণকাল 5.3 s। নিক্ষেপণ বেগ ও নিক্ষেপণ কোণ নির্ণয় কর।

৫। একটি ফুটবলকে ভূমির সাথে $30°$ কোণে $30\ \mathrm{ms}^{-1}$ বেগে কিক করা হলো। 1sec পরে ফুটবলের বেগের মান কত হবে?।

৬। একটি বুলেট কত বেগে শূন্যে নিক্ষিপ্ত হলে 39.2 m দূরবর্তী 19.6 m উচ্চতার একটি খাড়া দেয়াল কোন রকমে ভূমির সমান্তরালে অতিক্রম করবে।

৭। পানিভর্তি একটি বালতিকে 0.5 মি. রশির অগ্রভাগে বেধে সর্বনিম্ন কত দ্রুতিতে উল্লম্ব তলে ঘুরালেও সর্বোচ্চ বিন্দুতে বালতি থেকে পানি পড়বে না?

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.১ :	১। (খ)	২। (গ)	৩। (ক)	৪। (খ)	৫। (ঘ)
পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.২ :	১। (খ)	২। (গ)	৩। (ক)	৪। (খ)	
পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.৩ :	১। (খ)	২। (গ)	৩। (গ)	৪। (ক)	
পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.৪ :	১। (ঘ)	২। (ঘ)	৩। (ক)	৪। (ক)	৫। (ঘ)
পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.৫ :	১। (ক)	২। (ক)	৩। (গ)		
পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.৬ :	১। (গ)	২। (খ)	৩। (খ)	৪। (ঘ)	৫। (গ)
পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.৭ :	১। (খ)	২। (গ)	৩। (ঘ)		
পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.৮ :	১। (ক)	২। (গ)	৩। (খ)	৪। (ক)	
পাঠোত্তর মূল্যায়ন-২.৯ :	১। (গ)	২। (ক)	৩। (খ)	৪। (ঘ)	৫। (গ)

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

ক. সাধারণ বহুনির্বাচনী প্রশ্ন ঃ ১। (খ) ২। (ঘ) ৩। (খ)

খ. বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনী প্রশ্ন ঃ ১। (খ) ২। (ঘ)

গ. অভিন্ন তথ্যভিত্তিক প্রশ্ন ঃ ১। (খ) ২। (ঘ)

ঘ. সৃজনশীল প্রশ্ন ঃ- নিজে করুন। টিউটরের সহায়তা নিন।

ছ. গাণিতিক সমস্যা ঃ ১। 1960 m, 40s, 20s, 20s, 0 ২। 4s, 19.6 m ৩। 22.33 m
৪। $30\ ms^{-1}$, 60° ৫। $26.5\ ms^{-1}$ ৬। $27.71\ ms^{-1}$ ৭। $2.21\ ms^{-1}$