ভেক্টর
Vector

ইউনিট ১

ভূমিকা (Introduction)

পদার্থবিজ্ঞানের প্রধান আলোচ্য বিষয় হলো পদার্থ ও শক্তি। এসব বিষয় সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করতে হলে এদের কতগুলো বিষয় পরিমাপ করা আবশ্যক। পরিমাপযোগ্য এসব ভৌত বৈশিষ্ট্যকে রাশি বলা হয়। পদার্থবিজ্ঞান পর্যবেক্ষণ ও পরীক্ষণের মাধ্যমে এসব রাশিসমূহকে দুইভাগে ভাগ করা যায়। যথা: স্কেলার রাশি এবং ভেক্টর রাশি। স্কেলার রাশিগুলো প্রকাশের জন্য শুধু মানের প্রয়োজন হয় আর ভেক্টর রাশিগুলো প্রকাশের জন্য মান এবং দিক উভয়ের প্রয়োজন হয়। ভেক্টর রাশিগুলোর যোগ, বিয়োগ ও গুণ সাধারণ বীজগণিতের নিয়মে সম্পন্ন করা যায় না। ভেক্টর যোজন বিয়োজন ইত্যাদি সম্পন্ন করার জন্য জ্যামিতিক পদ্ধতি অনুসরণ করা হয়। এছাড়া ভেক্টর অপারেটর, ভেক্টর ক্যালকুলাস ইত্যাদি গুরুত্বপূর্ণ বিষয় সম্পর্কে আমরা এই ইউনিটে জানতে পারব।

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ-১.১ ভেক্টর রাশি ও স্কেলার রাশি
Vector and Scalar

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- ভেক্টর রাশি ও স্কেলার রাশির ধর্ম বর্ণনা করতে পারবেন।
- কতিপয় ভেক্টর রাশি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

১.১ ভেক্টর (Vector):

বিজ্ঞানের বিভিন্ন বিষয় সুনির্দিষ্টভাবে জানার জন্য বিভিন্ন রাশি পরিমাপ করতে হয়। যেমন দৈর্ঘ্য, ভর, সময়, উচ্চতা, সরণ, বেগ ইত্যাদি। এগুলো প্রত্যেকটি এক একটি রাশি। এসব রাশিকে ভৌত রাশি বলে। পদার্থবিজ্ঞানের অন্তর্গত সকল ভৌতরাশিকে একইভাবে প্রকাশ করা যায় না। কিছু কিছু ভৌত রাশিকে প্রকাশের জন্য শুধুমাত্র মানের প্রয়োজন হয়। আবার কিছু কিছু ভৌত রাশিকে প্রকাশের জন্য মান ও দিক উভয়ের প্রয়োজন হয়। এজন্য বৈশিষ্ট্য অনুসারে ভৌত রাশিগুলোকে দুইভাগে ভাগ করা হয়েছে। এগুলো হলো-

ক) স্কেলার রাশি বা অদিক রাশি (Scalar quantity)
খ) ভেক্টর রাশি বা দিক রাশি (Vector quantity)

যেসব ভৌত রাশির শুধুমাত্র মান আছে কিন্তু দিক নেই, তাদেরকে স্কেলার রাশি বা অদিক রাশি বলা হয়। যেমন, দৈর্ঘ্য, ভর, সময়, তাপমাত্রা ইত্যাদি।
আবার যেসব ভৌতরাশির মান ও দিক উভয়ই আছে, তাদেরকে ভেক্টর রাশি বা দিক রাশি বলা হয়। যেমন, সরণ, বেগ, ত্বরণ, বল ইত্যাদি।

১.২ ভেক্টর রাশির ধর্ম (Properties of vector):

ভেক্টর রাশিগুলো কিছু মৌলিক নিয়ম বা ধর্ম অনুসরণ করে। যেমন,
১. ভেক্টর রাশির মান ও দিক আছে।
২. সমজাতীয় ভেক্টরসমূহকে যোগ করা যায় কিন্তু ভিন্ন প্রকৃতির ভেক্টর যোগ করা যায় না।
৩. দুটি ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণফল একটি ভেক্টর রাশি।
৪. দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফল একটি স্কেলার রাশি।
৫. ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ, গুণ সাধারণ গাণিতিক নিয়ম মেনে চলে না।
৬. ভেক্টর রাশিকে উপাংশে বিভক্ত করা যায়।

১.৩ ভেক্টরের চিহ্ন (Symbol of vector):

ভেক্টর রাশিকে চিহ্ন দ্বারা নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়,
ক) অক্ষরের উপর তীর চিহ্ন ($\rightarrow$) দ্বারা ভেক্টর রাশি প্রকাশ করা হয়।
যেমন, A অক্ষরের ভেক্টর রূপ $\vec{A}$
$\vec{A}$ এর মান হচ্ছে $|\vec{A}|$ বা **A**

খ) অক্ষরের উপরে বা নিচে রেখা চিহ্ন ($-$) দ্বারা ভেক্টর রাশি প্রকাশ করা হয়।
যেমন, A অক্ষরের ভেক্টর রূপ $\bar{A}$ বা $\underline{A}$
এর মান হচ্ছে $|\bar{A}|$ বা $|\underline{A}|$
গ) মোটা হরফের অক্ষর দিয়ে দ্বারা ভেক্টর রাশি প্রকাশ করা হয়।
যেমন, A অক্ষরের ভেক্টর রূপ **A**
এর মান হচ্ছে $|\mathbf{A}|$বা A

ঘ) একক ভেক্টরকে টুপি (^) চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
যেমন, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ইত্যাদি একক ভেক্টরের উদাহরণ।

১.৪ ভেক্টর প্রকাশ (Vector Representation):

ভেক্টর রাশিগুলোকে গাণিতিকভাবে প্রকাশ করা যায়। ফলে রাশিটির মান ও দিক জানা যায়। নিম্নে কয়েকটি ভৌত রাশির ভেক্টর প্রকাশ দেখানো হল।

ক) বল (Force):
যে বাহ্যিক কারণে বস্তুর গতি বা স্থিতি অবস্থার পরিবর্তন ঘটে বা ঘটাতে চায় তাকে বল বলে।
বল একটি ভেক্টর রাশি। সুতরাং এর মান এবং দিক আছে। কোনো একটি গতিশীল বস্তুর ভর m, ত্বরণ $\vec{a}$ এবং বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বল, $\vec{F}$ হলে, এর ভেক্টর প্রকাশ হলো-
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

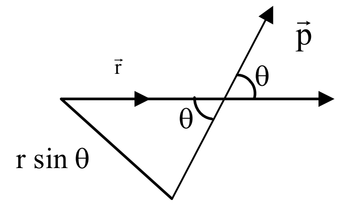
খ) কৌণিক ভরবেগ (Angular Momentum):

ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তুকণার ব্যাসার্ধ ও রৈখিক ভরবেগের ভেক্টর গুণফলকে কৌণিক ভরবেগ বলা হয়।

মনে করি, $\vec{r}$ = ঘূর্ণন কেন্দ্রের সাপেক্ষে বস্তুকণার ব্যাসার্ধ

$\vec{p}$ = বস্তুর রৈখিক ভরবেগ

অতএব কৌণিক ভরবেগ, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$



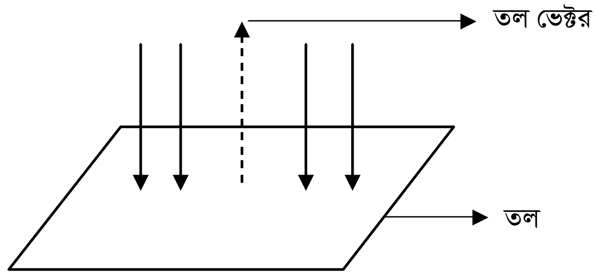
চিত্র: ১.১

এবং কৌণিক ভরবেগের মান, $L = rp \sin\theta$

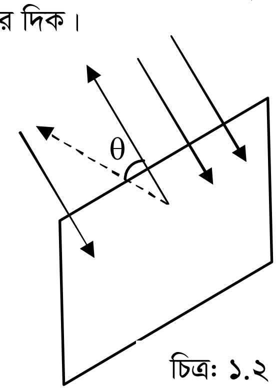
এখানে θ হচ্ছে $\vec{r}$ ও $\vec{p}$ এর মধ্যবর্তী কোণ। $\vec{r}$ ও $\vec{p}$ যে তলে অবস্থিত $\vec{L}$ এর দিক হবে ঐ তলের লম্ব বরাবর।

গ) তল (Surface):

একটি পৃষ্ঠের উপর অভিলম্ব অংকন করলে যে দিক নির্দেশিত হয় তা হচ্ছে ঐ তলের ভেক্টর এবং পৃষ্ঠটি হচ্ছে তল। এখানে লম্বের দৈর্ঘ্য হচ্ছে এই ভেক্টর রাশিটির মান এবং দিক হচ্ছে ভেক্টর রাশিটির দিক।



চিত্র: ১.২ (ক)



চিত্র: ১.২ (খ)

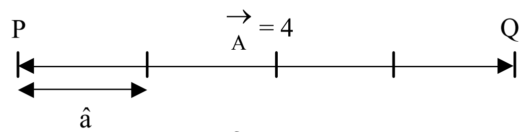
১.৫ বিশেষ ভেক্টর (Special vector):

একক ভেক্টর (Unit vector):

যে ভেক্টর রাশির মান এক একক তাকে একক ভেক্টর বলে। মান শূন্য নয় এরূপ একটি সঠিক ভেক্টরকে তার মান দ্বারা ভাগ করলে ঐ ভেক্টরের দিকে একটি একক ভেক্টর পাওয়া যায়। একক ভেক্টরকে টুপি (^) চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন, $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{n}$ ইত্যাদি দ্বারা একক ভেক্টরকে প্রকাশ করা হয়।

ধরি, $\vec{A}$ একটি ভেক্টর যার মান, $|\vec{A}| \neq 0$

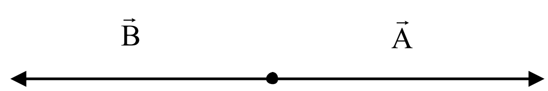
অতএব $\dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$ = $\vec{A}$ এর দিকে একক ভেক্টর = $\hat{a}$ (ধরি)।



চিত্র: ১.৩

যে কোনো একটি ভেক্টর $\vec{A}$ এর মান, A=4 একক এবং $\vec{A}$ এর দিকে একক ভেক্টর যদি $\hat{a}$ হয় তাহলে $\vec{A} = 4\hat{a}$ ।

সুতরাং কোনো ভেক্টরের মানকে ঐ ভেক্টরের একক ভেক্টর দ্বারা গুণ করলে ভেক্টরটি পাওয়া যায়।



চিত্র: ১.৪

নাল বা শূন্য ভেক্টর (Null or Zero vector):

যে ভেক্টর রাশির মান শূন্য, তাকে নাল বা শূন্য ভেক্টর বলা হয়। শূন্য ভেক্টরের পাদবিন্দু এবং শীর্ষবিন্দু একই। পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল দুটি সমান ভেক্টরের লব্দিই হল নাল ভেক্টর।

চিত্রানুসারে, $\vec{A} - \vec{B} = \vec{0}$

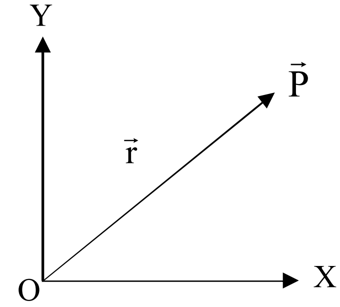
অবস্থান ভেক্টর (Position vector):

প্রসংগ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় করা হয়, তাকে অবস্থান ভেক্টর বলা হয়।

মনে করি, পরস্পর সমকোণে অবস্থিত X ও Y দুটি অক্ষ এবং মূলবিন্দু O। P যে কোনো একটি বিন্দু। তাহলে $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরটি O বিন্দু সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করে। সুতরাং $\overrightarrow{OP}$ একটি অবস্থান ভেক্টর।

অবস্থান ভেক্টরকে ব্যাসার্ধ ভেক্টরও বলা হয়ে থাকে। একে $\vec{r}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং, $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$



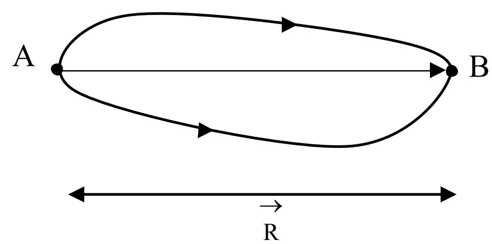
চিত্রঃ ১.৫

সরণ ভেক্টর (Displacement vector):

যে কোনো দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী পথের দৈর্ঘ্যকে যে কোনো ভাবেই অতিক্রম করা যায়। কিন্তু সরল বা রৈখিক পথে দুই বিন্দুর মধ্যবর্তী অতিক্রান্ত দূরত্বকে সরণ ভেক্টর বলা হয়।

সরল পথে A থেকে B বিন্দুর অতিক্রান্ত দূরত্ব AB=R।

অতএব $\vec{R}$ হলো সরণ ভেক্টর।



চিত্রঃ ১.৬

সার-সংক্ষেপ :

- **ভেক্টর রাশিঃ** যে সব ভৌত রাশির মান ও দিক উভয়ই আছে, তাদেরকে ভেক্টর রাশি বা দিক রাশি বলা হয়।
- **স্কেলার রাশিঃ** যে সব ভৌত রাশির শুধুমাত্র মান আছে কিন্তু দিক নেই, তাদেরকে স্কেলার রাশি বা অদিক রাশি বলা হয়।
- **একক ভেক্টরঃ** যে ভেক্টর রাশির মান এক একক তাকে একক ভেক্টর বলে।
- **নাল বা শূন্য ভেক্টরঃ** যে ভেক্টর রাশির মান শূন্য, তাকে নাল বা শূন্য ভেক্টর বলা হয়।
- **আয়ত একক ভেক্টরঃ** ত্রিমাত্রিক স্থানাংক ব্যবস্থায় ধনাত্মক X, Y ও Z অক্ষের দিকে যথাক্রমে একক $\hat{i}, \hat{j}$ এবং $\hat{k}$ ভেক্টরগুলোকে আয়তাকার বা আয়ত একক ভেক্টর বলা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-১.১

বহুনির্বাচনী প্রশ্নঃ

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন ।

১। নিচের কোন ভেক্টরটির মান শূন্য ?

(ক) নাল ভেক্টর (খ) অবস্থান ভেক্টর (গ) একক ভেক্টর (ঘ) সরণ ভেক্টর

২। কৌণিক ভরবেগের দিক হচ্ছে-

(ক) $\vec{r} \times \vec{p}$ এর দিকে (খ) $\vec{p} \times \vec{r}$ এর দিকে (গ) $\vec{r} . \vec{p}$ এর দিকে (ঘ) $\vec{p} . \vec{r}$ এর দিকে

পাঠ-১.২ ভেক্টর রাশির যোগ
Addition of Vector

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- ভেক্টর রাশির যোগের নিয়ম ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- সামান্তরিকের সূত্রের সাহায্যে দুটি ভেক্টর রাশির লব্দির মান হিসাব করতে পারবেন।

২.১ ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক যোজন নিয়ম (Geometrical Addition of Vector)**ঃ**

সমজাতীয় দুটি ভেক্টরকে যোগ বা বিয়োগ করা যায়। ভেক্টর রাশির মান ও দিক উভয়ই আছে। এজন্য ভেক্টর রাশির যোগ-বিয়োগ সাধারণ বীজগাণিতিক নিয়মে করা যায় না।

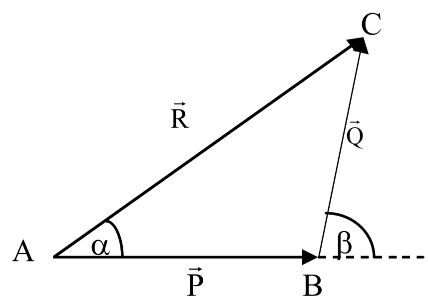
দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশি যোগ করে নতুন যে ভেক্টরটি পাওয়া যায় তাকে লব্ধি (Resultant) বলা হয়। যে ভেক্টর সমূহ যোগ করে লব্ধি পাওয়া যায় সেসব ভেক্টরকে লব্ধির অংশক বা উপাংশ (component) বলা হয়।

জ্যামিতিক পদ্ধতিতে ভেক্টর রাশির যোগ নিম্নলিখিত পাঁচটি সূত্রের সাহায্যে করা যায়। যেমন-

১. সাধারণ সূত্র (General law)
২. ত্রিভুজ সূত্র (Law of triangle)
৩. বহুভুজ সূত্র (Law of polygon)
৪. সামান্তরিক সূত্র (Law of parallelogram)
৫. উপাংশ সূত্র (Law of component)

এই পাঠে কয়েকটি সূত্র বর্ণনা করা হলো।

সাধারণ সূত্র : দুটি সমজাতীয় ভেক্টরের প্রথমটির শীর্ষবিন্দু বা শেষবিন্দু এবং দ্বিতীয়টির আদিবিন্দু একই বিন্দুতে স্থাপন করলে প্রথম ভেক্টরের আদিবিন্দু এবং দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুর মধ্যে সংযোগকারী সরলরেখার দৈর্ঘ্য ভেক্টর দুটির লব্ধির মান নির্দেশ করবে এবং ঐ সরলরেখার দিক লব্ধি ভেক্টরের দিক নির্দেশ করবে।



চিত্র: ১.৭

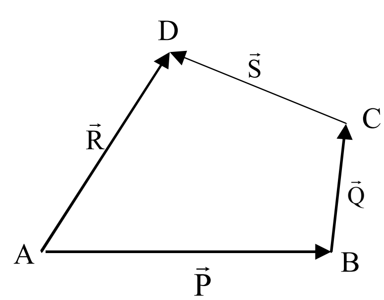
ব্যাখ্যাঃ

ধরা যাক, একই সময়ে একই বিন্দুতে দুটি ভেক্টর রাশি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ক্রিয়াশীল। ভেক্টর দুটিকে যথাক্রমে AB ও BC রেখা দ্বারা নির্দেশ করা হলো।

অর্থাৎ, AB = $\vec{P}$ এবং BC = $\vec{Q}$ ।

তাহলে $\vec{P}$ ভেক্টর নির্দেশকারী সরলরেখা AB এর শীর্ষবিন্দু এবং $\vec{Q}$ ভেক্টর নির্দেশকারী সরলরেখা BC এর আদিবিন্দু উভয়েই B তে অবস্থান করে। এখন $\vec{P}$ ভেক্টরের আদিবিন্দু A এবং $\vec{Q}$ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু C যোগ করি এবং রেখাটিকে A হতে C অভিমুখে তীরচিহ্নিত করি। তাহলে তীর চিহ্নিত AC রেখাটি লব্দি $\vec{R}$ নির্দেশ করে। সুতরাং ভেক্টর রাশি দুইটির যোগফল নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়-

$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$ ....(১.১)



চিত্র: ১.৮

অনুরূপভাবে, দুইয়ের অধিক ভেক্টর রাশি যোগ করা যায়।

১.৮ নং চিত্রানুযায়ী তিনটি ভেক্টর $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ও $\vec{S}$ এর লব্ধি নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়।

অর্থাৎ, $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}$ ....(১.২)

ত্রিভূজ সূত্র : একটি ত্রিভুজের দুটি বাহু যদি একই ক্রমে, মানে ও দিকে দুটি ভেক্টরকে নির্দেশ করে তাহলে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীতক্রমে ভেক্টর দুটির লব্ধি নির্দেশ করে।

ব্যাখ্যাঃ

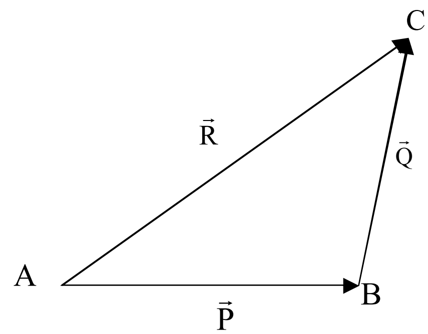
মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটি যোগ করতে হবে। প্রথমে $\vec{P}$ এর প্রান্তবিন্দুর সাথে $\vec{Q}$ এর আদিবিন্দু যুক্ত করতে হবে। ফলে ভেক্টর দুটি মানে ও দিকে AB ও BC বাহুকে নির্দেশ করে। এখন $\vec{P}$ এর আদিবিন্দুর সাথে $\vec{Q}$ এর শেষ বিন্দু যোগ করে ABC ত্রিভূজ গঠন করা হল। তাহলে AC বাহুটি দিকে ও মানে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর লব্ধি ভেক্টর $\vec{R}$ নির্দেশ করে (চিত্র ১.৯)।

অর্থাৎ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ বা, $\vec{P}+\vec{Q} = \vec{R}$ ....(১.৩)

আবার $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$ [যেহেতু, $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$]

বা, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$ ....(১.৪)

অতএব ত্রিভূজের তিনটি বাহু যদি একই ক্রমে তিনটি সমজাতীয় ভেক্টরকে নির্দেশ করে তাহলে এদের লব্ধি শূন্য হবে।



চিত্রঃ ১.৯

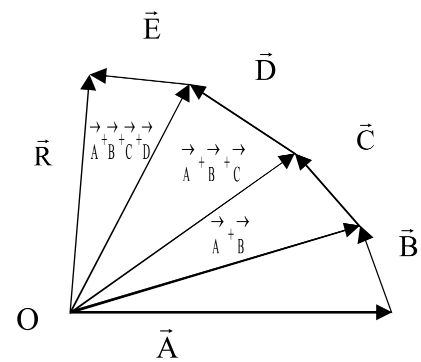
বহুভূজ সূত্রঃ

দুই এর অধিক ভেক্টর রাশির ক্ষেত্রে ভেক্টর রাশিগুলোকে একই ক্রমে সাজিয়ে অর্থাৎ প্রথম ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুতে দ্বিতীয় ভেক্টরের পাদবিন্দু, দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষ বিন্দুতে তৃতীয় ভেক্টরের পাদবিন্দু এভাবে রেখে প্রথম ভেক্টরের পাদবিন্দু এবং শেষ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু যোগ করলে যে বহুভূজ পাওয়া যায় তার শেষ বাহুটি বিপরীতক্রমে ভেক্টর রাশিগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

ব্যাখ্যাঃ

মনে করি $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ ও $\vec{E}$ পাঁচটি ভেক্টর রাশি। এদের লব্ধি নির্ণয় করতে হবে। তাহলে সূত্রানুসারে, প্রথম ভেক্টর রাশি $\vec{A}$ এর আদিবিন্দু এবং শেষ ভেক্টর রাশি $\vec{E}$ এর শীর্ষবিন্দুর সংযোজক ভেক্টর রাশি $\vec{R}$ -ই উক্ত ভেক্টর রাশিগুলোর মান ও দিক নির্দেশ করে।

$\therefore$ লব্ধি, $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$



চিত্রঃ ১.১০

সামান্তরিক সূত্রঃ

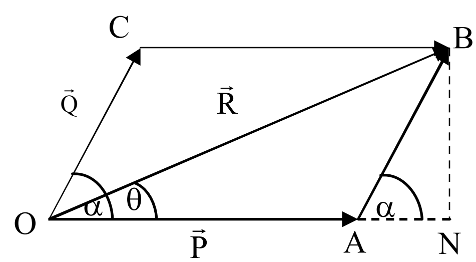
কোনো সামান্তরিকের একই বিন্দু হতে অংকিত সন্নিহিত বাহু দুটি যদি কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টর রাশির মান ও দিক নির্দেশ করে, তাহলে ঐ বিন্দু হতে অংকিত সামান্তরিকের কর্ণই লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

ব্যাখ্যাঃ

মনে করি, O বিন্দুতে একটি কণার উপর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয় $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OC}$ বরাবর একই সময়ে পরস্পর α কোণে ক্রিয়াশীল। তাহলে OA ও OC কে সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু ধরে OABC সামান্তরিকটি অঙ্কন করে OB যুক্ত করি। তাহলে সূত্রানুসারে উভয় ভেক্টরের ক্রিয়াবিন্দু O থেকে অঙ্কিত কর্ণ $\overrightarrow{OB}$ ই $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি ভেক্টর $\vec{R}$ নির্দেশ করে।

অর্থাৎ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$

বা, $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$



চিত্রঃ ১.১১

লব্দির মান নির্ণয়ঃ

মনে করি, লব্ধির মান R এবং $\angle AOC = \alpha$ কোনটি সূক্ষ্মকোণ। এখন B বিন্দু হতে OA এর বর্ধিতাংশের উপর BN লম্ব টানি, যা OA বাহুকে N বিন্দুতে ছেদ করে।

AB ও OC সমান্তরাল।

$\therefore \angle AOC = \angle BAN = \alpha$

আবার OBN ত্রিভূজের $\angle ONB = 90^\circ$

$\therefore OB^2 = ON^2 + BN^2 = (OA + AN)^2 + BN^2$ .... (১.৫)

আবার ANB সমকোণী ত্রিভূজ হতে

$AB^2 = AN^2 + BN^2$......... .... (১.৬)

এবং $\cos\alpha = \frac{AN}{AB}$ বা, $AN = AB\cos\alpha$ .... (১.৭)

সমীকরণ (১.৫) এ মান বসিয়ে এবং সমাধান করে পাই

$OB^2 = OA^2 + 2.OA.AN + AN^2 + BN^2$

বা, $OB^2 = OA^2 + 2.OA.\ AB\cos\alpha + AB^2$

বা, $R^2 = P^2 + 2.P.Q\cos\alpha + Q^2$

$\therefore R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$ .... (১.৮)

লব্দির দিক নির্ণয়:

ধরা যাক, লব্ধি $\vec{R}$, $\vec{P}$ এর সাথে θ কোণে ক্রিয়া করছে। অর্থাৎ $\angle AOB = \theta$

$\therefore$ OBN সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই

$$\tan\theta = \frac{BN}{ON} = \frac{BN}{OA+AN} = \frac{AB\sin\alpha}{OA+AB\cos\alpha} = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha} \quad .... \ .... \ .... \ (১.৯)$$

ANB সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই

$\sin\alpha = \frac{BN}{AB}$ বা, $BN = AB\sin\alpha$

$\cos\alpha = \frac{AN}{AB}$ বা, $AN = AB\cos\alpha$

সুতরাং সমীকরণ (১.৮) ও (১.৯) যথাক্রমে লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

বিশেষ ক্ষেত্র (Special cases):

(i) যদি $\alpha = 0$ হয়, তাহলে ভেক্টর দুটি একই দিকে ক্রিয়া করে, তখন $\theta = 0^\circ$ হয়।

অর্থাৎ দুটি ভেক্টর একই দিকে ক্রিয়া করলে এদের লব্ধির মান হবে ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল এবং দিক হবে ভেক্টরদ্বয় যেদিকে ক্রিয়া করে সেদিকে।

(ii) যদি $\alpha = 90^\circ$ হয়, তাহলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়া করে, তখন $\theta = \tan^{-1}(\frac{Q}{P})$।

(iii) যদি $\alpha = 180^\circ$ হয়, তাহলে ভেক্টরদুটি পরস্পর বিপরীতদিকে ক্রিয়া করে, তখন $\theta = 0^\circ$।

লব্ধির সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান (Maximum and minimum value of the resultant):

মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয় একই সময়ে কোনো বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়াশীল আছে। ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সুত্রানুসারে, এদের লব্ধির মান, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

(i) লব্দি $\vec{R}$ এর মান $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণের উপর নির্ভর করে। $\vec{R}$ এর মান সর্বাধিক হবে যখন $\cos\alpha$ এর মান সর্বাধিক হবে অর্থাৎ $\cos\alpha = 1 = \cos 0^\circ$ বা, $\alpha = 0^0$

$\therefore R_{max} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

$= \sqrt{(P+Q)^2} = (P+Q)$ .... (১.১০)

অতএব দুটি ভেক্টর যখন একই সরলরেখা বরাবর পরস্পর একই দিকে ক্রিয়া করে তখন তাদের লব্ধির মান সর্বোচ্চ হবে এবং এই সর্বোচ্চ মান ভেক্টর রাশি দুটির যোগফলের সমান।

(ii) লব্ধি $\vec{R}$ এর মান সর্বনিম্ন হবে যদি $\cos\alpha$ এর মান সর্বনিম্ন হয় অর্থাৎ $\cos\alpha = -1 = \cos 180^\circ$

বা, $\alpha = 180^0$

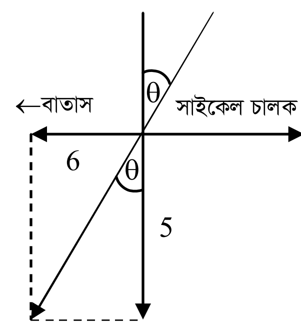
$$\therefore R_{min} = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\alpha}$$

$$= \sqrt{(P-Q)^2}$$

$$= (P - Q) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (১.১১)$$

অতএব দুটি ভেক্টর যখন একই সরলরেখা বরাবর পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে তখন তাদের লব্ধির মান শূন্য হবে এবং এই লব্ধির মান ভেক্টর রাশি দুটির বিয়োগফলের সমান।

গাণিতিক উদাহরণ ২.১:একজন সাইকেল চালক $6\ ms^{-1}$ বেগে যাবার সময় $5\ ms^{-1}$ বেগে লম্বভাবে পতিত বৃষ্টির সম্মুখীন হয়েছিল। সাইকেল চালক কত কোণে ছাতা ধরলে বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেত?



সমাধান: মনে করি, বৃষ্টির লব্ধি বেগ উলম্ব দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore \tan\theta = \frac{6}{5} = 1.2$$

বা, $\theta = \tan^{-1} 1.2 = 50.2°$

সুতরাং, উক্ত সাইকেল চালককে উলম্ব দিকের সাথে উক্ত কোণে ছাতা ধরতে হবে।

উত্তর: 50.2°

সার-সংক্ষেপ :

- **লব্ধি ও উপাংশ:** দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশির যোগফলকে লব্ধি এবং রাশিগুলোকে লব্ধির অংশক বা উপাংশ বলা হয়।
- **ত্রিভুজ সূত্র:** দুটি ভেক্টর রাশিকে কোনো ত্রিভুজের সন্নিহিত বাহু দ্বারা একই ক্রমে মানে ও দিকে সূচিত করা হলে ত্রিভূজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীতক্রমে ভেক্টর দুটির লব্ধি নির্দেশ করে।
- **সামান্তরিক সূত্র:** কোনো সামান্তরিকের একই বিন্দু হতে অংকিত সন্নিহিত বাহু দুটি যদি কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টর রাশির মান ও দিক নির্দেশ কর, তাহলে ঐ বিন্দু হতে অংকিত সামান্তরিকের কর্ণই লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-১.২

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন ।

১। দুইয়ের অধিক ভেক্টরের যোগের ক্ষেত্রে কোন্ সূত্রটি প্রয়োগ করা যায় ?

(ক) ত্রিভুজ সূত্র (খ) সামান্তরিক সূত্র (গ) সাধারণ সূত্র (ঘ) বহুভুজ সূত্র

২। দুটি সমান মানের বলের লব্ধির মান যদি যে কোনো একটি বলের সমান হয় তাহলে বল দুটির মধ্যবর্তী কোণ কত হবে?

(ক) 0° (খ) 90° (গ) 120° (ঘ) 180°

পাঠ-১.৩ ভেক্টরের বিভাজন Resolution of Vectors

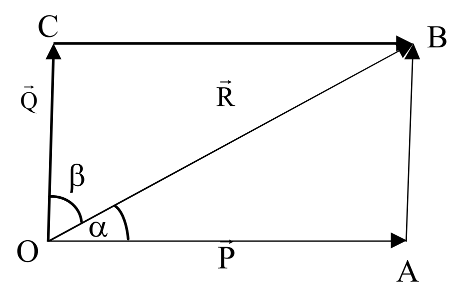
উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- একটি ভেক্টরকে দুটি লম্ব উপাংশে বিভাজন করতে পারবেন।
- ত্রিমাত্রিক আয়ত স্থানাংক ব্যবস্থায় একটি ভেক্টরকে প্রকাশ করতে পারবেন।
- উপাংশের সাহায্যে ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ করতে পারবেন।

৩.১: লম্বাংশের সাহায্যে ভেক্টর রাশির যোজন ও বিয়োজন (Vectors addititon and subtraction in terms of components) :

সামান্তরিক সূত্রের সাহায্যে একটি ভেক্টর রাশিকে বিভক্ত করা যায়। একটি ভেক্টর রাশিকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করার পদ্ধতিকে ভেক্টর রাশির বিভাজন বা বিশ্লেষণ বলা হয়। একটি ভেক্টর রাশিকে এর লম্ব উপাংশে বিভক্ত করা যায়। এই বিভাজিত ভেক্টর রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে মূল ভেক্টর রাশিটির এক একটি অংশক বা উপাংশ (Component) বলা হয়।



চিত্র: ১.১২

চিত্রানুযায়ী, OB রেখা ভেক্টর $\vec{R}$ এর মান নির্দেশ করে। যদি $\vec{R}$ কে সমকোণে বিভাজিত করা হয় অর্থাৎ $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ উপাংশ দুটি পরস্পর সমকোণে ক্রিয়া করে, তাহলে $\alpha + \beta = 90^\circ$ হবে। সুতরাং OB এর সাথে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ উপাংশ দুটি যথাক্রমে α ও β কোণ উৎপন্ন করে। এখন OB কে কর্ণ ধরে OABC সামন্তরিকটি অংকন করা হল।

এখন, AOB সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই

$$\cos\alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{P}{R} \quad \text{বা, } P = R\cos\alpha \quad \text{(১.১২)}$$

$$\text{এবং, } \sin\alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{Q}{R} \quad \text{বা, } Q = R\sin\alpha \quad \text{(১.১৩)}$$

$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ উপাংশ দুটিকে মূল ভেক্টর রাশি $\vec{R}$ এর লম্বাংশ বলা হয়। $\vec{P}$ কে অনুভূমিক উপাংশ (Horizontal component) এবং $\vec{Q}$ কে উলম্ব উপাংশ (Vertical component) বলা হয়।

উপাংশ দুটির ভেক্টর রূপ হল

$\vec{P} = \hat{i} R\cos\alpha$ এবং $\vec{Q} = \hat{j} R\sin\alpha$

অতএব, ভেক্টর যোজন, $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = \hat{i} R\cos\alpha + \hat{j} R\sin\alpha$ .... (১.১৪)

ভেক্টর বিয়োজন, $\vec{R} = \vec{P} - \vec{Q} = \hat{i} R\cos\alpha - \hat{j} R\sin\alpha$ .... (১.১৫)

ভেক্টর বিভাজনের উদাহরণ:

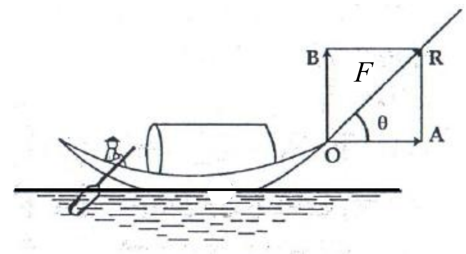
১. নৌকার গুণ টানা:

মনে করি, একটি নৌকার O বিন্দুতে গুণ বাঁধা আছে। গুণ ধরে নৌকাটিকে OR বরাবর নদীর পাড় দিয়ে $\vec{F}$ বলে টেনে নেওয়া হচ্ছে।

বিভাজন পদ্ধতি দ্বারা O বিন্দুতে F বলকে অনুভূমিক উপাংশ ও উলম্ব উপাংশে বিভক্ত করা যায়।

OA বরাবর অনুভূমিক উপাংশ $F\cos\theta$ এবং OB বরাবর উলম্ব উপাংশ $F\sin\theta$ ক্রিয়াশীল।

বলের অনুভূমিক উপাংশ $F\cos\theta$ নৌকাকে সামনের দিকে এগিয়ে নিয়ে যায় এবং উলম্ব উপাংশ $F\sin\theta$ নৌকাটিকে পাড়ের দিকে টেনে নিয়ে যায়। কিন্তু উলম্ব উপাংশ $F\sin\theta$ কে নৌকার হাল দ্বারা প্রশমিত করা হয়। গুণ লম্বা হলে θ এর মান কম হবে। ফলে $F\sin\theta$ এর মান কম হবে। এ অবস্থায় $F\cos\theta$ এর মান বেশী হয়। ফলে নৌকাটি দ্রুত সামনের দিকে এগিয়ে যাবে।



চিত্রঃ ১.১৩

২. লন-রোলার চালনাঃ

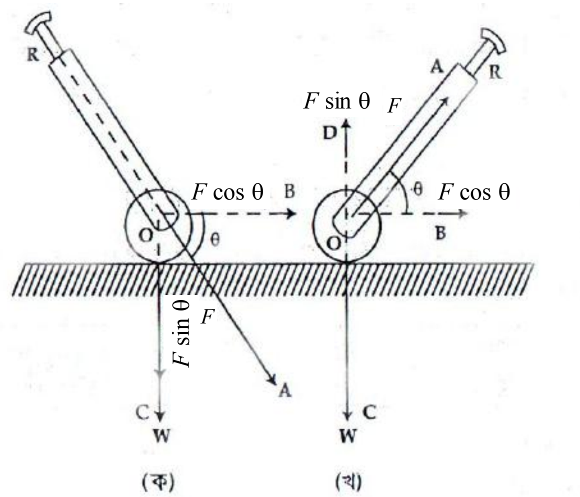
তলের উপর যখন কোনো বস্তুকে ঠেলা বা টানা হয় তখন তল এবং বস্তুর মধ্যে একটি বল ক্রিয়াশীল হয়, যার ফলে বস্তুর গতি বাধাপ্রাপ্ত হয়। বস্তুর ওজন বেশী হলে ঘর্ষণ বলও বেশী হয়। রোলারকে ঠেলে বা টেনে গতিশীল করা হয়।

ঠেলার ক্ষেত্রেঃ মনে করি, রোলারের ওজন = $\vec{W}$

রোলারের হাতলের উর প্রযুক্তবল = $\vec{F}$

রোলারের O বিন্দুতে F বল অনুভূমিকের সাথে θ কোণে ক্রিয়া করে। [চিত্র ১.১৪(ক)]। O বিন্দুতে এই বল দুটি লম্ব উপাংশে বিভক্ত হয়ে যায়।

অনুভূমিক উপাংশ $F\cos\theta$, OB বরাবর ক্রিয়া করে রোলারকে সামনের দিকে এগিয়ে নিয়ে যায় এবং উলম্ব উপাংশ $F\sin\theta$, OC বরাবর নিচের দিকে ক্রিয়া করে যার ফলে রোলারের ওজন বেড়ে যায়। এ অবস্থায় রোলারের মোট ওজন হয় $(W+F\sin\theta)$। ফলে রোলারের প্রকৃত ওজনের চেয়ে ভারী হয়ে যায় এবং ঘর্ষণ বলের মানও বেড়ে যায়। এজন্য রোলার ঠেলা কষ্টকর।



চিত্রঃ ১.১৪

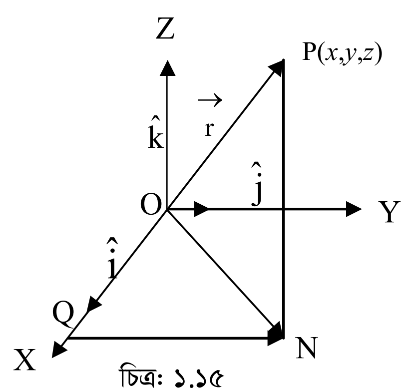
টানার ক্ষেত্রেঃ মনে করি, রোলারের ওজন = $\vec{W}$

রোলারের হাতলের উপর প্রযুক্তবল = $\vec{F}$

রোলারের O বিন্দুতে $\vec{F}$ বল অনুভূমিক রেখা, OB এর সাথে θ কোণে ক্রিয়া করছে। [চিত্র ১.১৪(খ)]। বল $\vec{F}$ এর দুটি লম্ব উপাংশ হচ্ছে, $F\cos\theta$ = অনুভূমিক উপাংশ যা রোলারটিকে সামনের দিকে এগিয়ে নিয়ে যায় এবং $F\sin\theta$ = উলম্ব উপাংশ, যা রোলারের উপরের দিকে OD বরাবর ক্রিয়া করে। ফলে রোলারের মোট ওজন হ্রাস পায় এবং রোলারের ওজন হয় $(W - F\sin\theta)$। তাই টানার সময় রোলার হাল্কা অনুভূত হয় এবং ঘর্ষণ বলও হ্রাস পায়। এজন্য রোলারকে ঠেলা অপেক্ষা টানা সহজতর।

৩.২: ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিস্তারের ভেক্টরের বিভাজন (Resolution of vector in three dimensional coordinates) :

কোনো অবস্থান ভেক্টরকে ত্রিমাত্রিক স্থানাংক ব্যবস্থায় নিম্নলিখিত উপায়ে লেখা যায় এবং এই প্রকাশকে ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিস্তারের ভেক্টরের বিভাজন হিসাবে বিবেচ্য।



চিত্রঃ ১.১৫

$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$; এখানে এর অবস্থান স্থানাংক (x, y, z)।

মনে করি, X, Y, Z অক্ষ বরাবর এবং OX, OY, OZ সরলরেখা তিনটি পরস্পর সমকোণে অবস্থিত। ত্রিমাত্রিক ব্যবস্থায় OP রেখাটি একটি ভেক্টর রাশি $\vec{r}$ নির্দেশ করছে।

আবার, ধরা যাক, $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু P এর স্থানাংক (x, y, z) এবং $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ একক ভেক্টর রাশিগুলো ধনাত্মক X, Y, Z অক্ষ বরাবর ক্রিয়া করে। PN রেখাটি XY সমতলের উপর এবং NQ রেখাটি হলো OX এর উপর লম্ব।

চিত্রানুযায়ী, ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র ব্যবহার করে পাই,

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP}$ এবং $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QN}$

$\therefore \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NP}$

আবার, $\overrightarrow{OQ} = \hat{i}x$, $\overrightarrow{QN} = \hat{j}y$, $\overrightarrow{NP} = \hat{k}z$ এবং $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$

$\therefore \vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ ....(১.১৬)

এখানে x, y, z হলো যথাক্রমে X, Y ও Z অক্ষ বরাবর $\vec{r}$ ভেক্টরের উপাংশের মান।

ভেক্টরের মানঃ

চিত্র ১.১৫ অনুযায়ী OPN এবং OQN সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় হতে পাই,

$OP^2 = ON^2 + NP^2$ এবং $ON^2 = OQ^2 + QN^2$

$\therefore OP^2 = OQ^2 + QN^2 + NP^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .... (১.১৭)

$\vec{r}$ বরাবর সমান্তরাল একক ভেক্টর রাশিকে নিম্নরূপভাবে প্রকাশ করা যায়।

$|\vec{r}| = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ .... (১.১৮)

৩.৩ঃ উপাংশের সাহায্যে ভেক্টর রাশির যোজন ও বিয়োজন :

ধরা যাক, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি সমজাতীয় ভেক্টর।

$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

এবং $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

ভেক্টর রাশির যোজনের ক্ষেত্রে, $\vec{A} + \vec{B} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} + B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

$= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$

$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2}$

অনুরূপভাবে বিয়োজনের ক্ষেত্রে,

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2}$$

সার-সংক্ষেপ :

- **ভেক্টর রাশির বিভাজন ও উপাংশ:** একটি ভেক্টর রাশিকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করার প্রক্রিয়াকে ভেক্টর রাশির বিভাজন বা বিশ্লেষণ বলা হয়। এই বিভাজিত ভেক্টর রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে মূল ভেক্টর রাশির এক একটি উপাংশ বা অংশক বলা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-১.৩

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন ।

১। লন রোলারের ক্ষেত্রে প্রয়োজ্য-

i. ঠেলার সময় এর ওজন বেড়ে যায়।
ii. টানার সময় এর ওজন হ্রাস পায়।
iii. ঠেলা অপেক্ষা টানা কঠিন।

নিচের কোন্‌টি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii
(গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

২। ভেক্টর বিভাজনের ক্ষেত্রে উপাংশগুলোর লব্ধি হচ্ছে-

(ক) আংশিক ভেক্টর (খ) মূল ভেক্টর
(গ) লব্ধি উপাংশ (ঘ) লব্ধি ভেক্টর

পাঠ-১.৪ ভেক্টরের গুণন
Multiplication of Vector

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণন ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- দুটি ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণন ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

৪.১: ভেক্টর গুণনের প্রকারভেদ (Classification of vector multiplication):

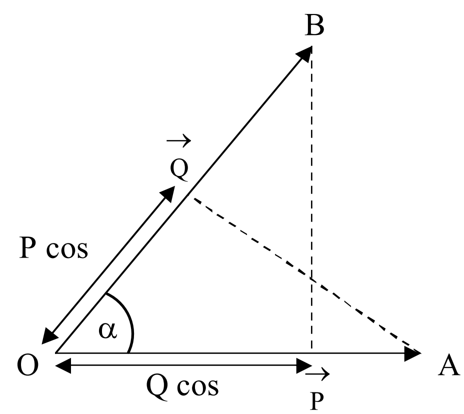
কিছু নির্দিষ্ট নিয়ম অনুসরণ করে ভেক্টর গুণন করতে হয়। ভেক্টর গুণন দুই প্রকার। যথা:

১. স্কেলার গুণন বা ডট গুণন এবং

২. ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন।

১. স্কেলার গুণন বা ডট গুণন (Scalar or Dot product): "দুটি ভেক্টর রাশির একটি স্কেলার গুণফল একটি স্কেলার রাশি হবে যার মান রাশি দুটির মান এবং এদের মধ্যবর্তী কোণের কোসাইনের গুণফলের সমান।"

দুটি ভেক্টর রাশির মানের গুণফলের সাথে তাদের মধ্যবর্তী কোণের কোসাইনের গুণফলকে স্কেলার গুণফল বা ডট গুণফল বলে। দুটি ভেক্টর রাশির মধ্যে ডট (.) চিহ্ন দিয়ে ডট গুনফল প্রকাশ করতে হয়।



চিত্র: ১.১৬

ব্যাখ্যা:

মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর রাশিদ্বয় OA ও OB সরলরেখা বরাবর ক্রিয়া করছে।

সুতরাং, OA ও OB সরলরেখা দুটি ভেক্টর রাশি দুটির মান ও দিক নির্দেশ করছে এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ α। তাদের স্কেলার বা ডট গুণফল = $\vec{P}.\vec{Q}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

সংজ্ঞানুসারে আমরা লিখতে পারি,

$\vec{P}.\vec{Q} = |\vec{P}||\vec{Q}|\cos\alpha = PQ\cos\alpha = QP\cos\alpha$ .... (১.১৯); যেখানে $0 \le \alpha \le \pi$।

$Q\cos\alpha$ হচ্ছে $\vec{P}$ এর দিকে $\vec{Q}$ এর উপাংশ বা $\vec{P}$ এর উপর $\vec{Q}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ। একইভাবে $\vec{Q}$ এর দিকে $\vec{P}$ এর উপাংশ হচ্ছে $P\cos\alpha$।

$$\therefore \vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\alpha = Q(P\cos\alpha)$$

সমীকরণ (১.১৯) হতে দেখা যায় যে, দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফল একটি স্কেলার রাশি।

অতএব, যে কোনো দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল বলতে বুঝায় যে কোনো একটি ভেক্টরের মান এবং সেই ভেক্টরটির দিকে অপর ভেক্টরটির উপাংশ বা সেই ভেক্টরটির উপর অপর ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপের গুণফল।

উল্লেখ্য যে, $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\alpha = P\times Q\cos\alpha = Q\times P\cos\alpha$

বিশেষ দ্রষ্টব্যঃ

ক) যখন $\alpha = 0^\circ$, তখন $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos 0^\circ = PQ$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর সমান্তরাল।

খ) যখন $\alpha = 90^\circ$, তখন $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos 90^\circ = 0$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হয়।

গ) যখন $\alpha = 180^\circ$, তখন $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos 180^\circ = -PQ$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর সমান্তরাল এবং বিপরীতমুখী হবে।

স্কেলার গুণনের উদাহরণঃ

ধরা যাক, $\vec{F}$ বল একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করার ফলে বলের অভিমুখে S সরণ ঘটল। বল $\vec{F}$ এবং সরণ $\vec{S}$ উভয়েই ভেক্টর রাশি। সুতরাং, এই রাশি দুইটির স্কেলার গুণফল কাজ, W একটি স্কেলার রাশি।

$W = \vec{F}.\vec{S} = FS\cos\alpha$ ....(১.২০)

স্কেলার গুণনের নিয়মাবলীঃ

i) $\vec{P}.\vec{Q} = \vec{Q}.\vec{P}$

ii) $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos 90^\circ = 0;$

অর্থাৎ, দুটি ভেক্টরের ডট বা স্কেলার গুণন শূন্য হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে।

iii) $\hat{i}.\hat{i} = 1\times1\cos 0^\circ = 1\times1\times1 = 1;$

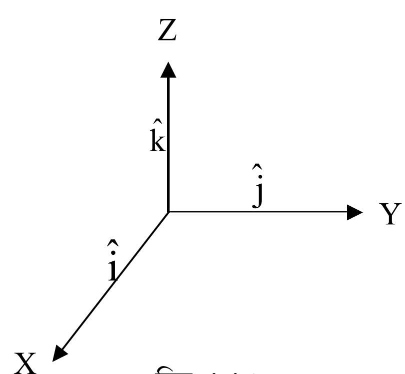
একইভাবে, $\hat{j}.\hat{j} = 1$ এবং $\hat{k}.\hat{k} = 1$

$\therefore\ \hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

iv) $\hat{i}.\hat{j} = 1\times1\cos 90^\circ = 1\times1\times0 = 0;$ [$\hat{i}$ ও $\hat{j}$ পরস্পর লম্ব]

একইভাবে, $\hat{j}.\hat{k} = 0$ এবং $\hat{k}.\hat{i} = 0$

$\therefore\ \hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0$

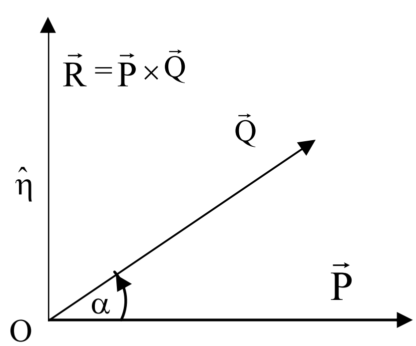


চিত্রঃ ১.১৭

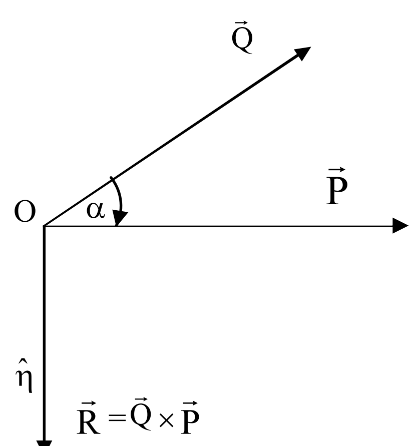
২. ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন (Vector product or Cross Product)

যদি দুটি ভেক্টর রাশির গুণফল একটি ভেক্টর রাশি হয় তবে ঐ গুণনকে ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন বলা হয়। এই ভেক্টর গুণফলের মান ভেক্টর রাশি দুটির মান এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণের সাইন (sine) এর গুণফলের সমান। এ ভেক্টর গুণফলের দিক ডান হাতি স্ক্রু নিয়ম দ্বারা নির্ধারিত হয়।

ব্যাখ্যাঃ মনে করি, O বিন্দুতে দুটি ভেক্টর রাশি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পরস্পরের সাথে α কোণে ক্রিয়া করছে।



চিত্রঃ ১.১৮ (ক)



চিত্রঃ ১.১৮ (খ)

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে, এদের ভেক্টর গুণফল বা ক্রস গুণফল হবে

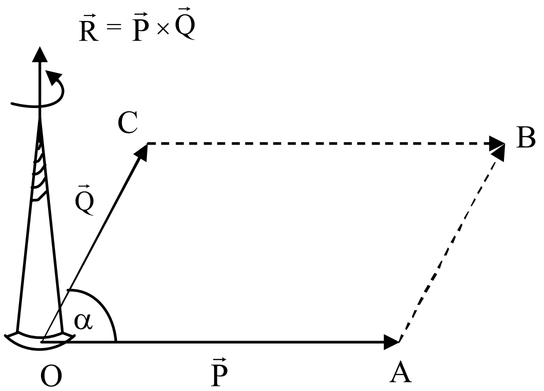
$\vec{R} = \vec{P}\times\vec{Q} = \hat{\eta}|\vec{P}||\vec{Q}|\sin\alpha$; যেখানে $0 \le \alpha \le \pi$

বা, $\vec{R} = \vec{P}\times\vec{Q} = \hat{\eta}\,PQ\sin\alpha$ ....(১.২১)

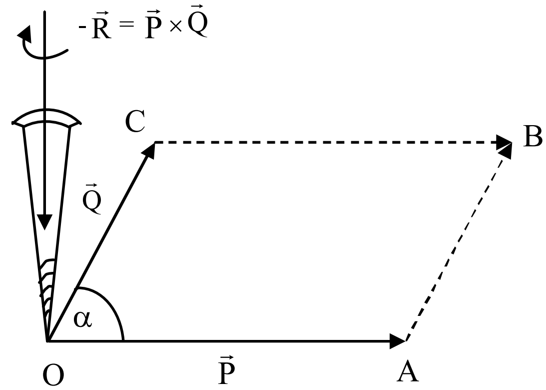
এখানে, $\hat{\eta}$ (ইটা) হল একটি একক ভেক্টর যা $\vec{R}$ এর দিক নির্দেশ করে।

ডান হাতি স্ক্রু নিয়মঃ

ভেক্টর রাশি দুটি যে সমতলে অবস্থিত সেই সমতলের উপর লম্বভাবে একটি ডান হাতি স্ক্রুকে রেখে স্ক্রুটিকে প্রথম ভেক্টর হতে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতম কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যে দিকে অগ্রসর হয় সেই দিকই হবে $\hat{\eta}$ এর দিক।



চিত্রঃ ১.১৯ (ক)



চিত্রঃ ১.১৯ (খ)

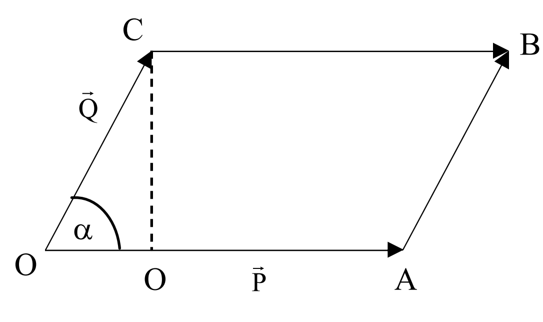
উপরোল্লিখিত নিয়মানুসারে, $\vec{P}\times\vec{Q}$ এর অভিমুখ হবে উপরের দিকে [চিত্রঃ ১.১৯ (ক)] এবং $\vec{Q}\times\vec{P}$ এর অভিমুখ হবে নিচের দিকে [চিত্রঃ ১.১৯ (খ)]। প্রথম ক্ষেত্রে অর্থাৎ $\vec{P}\times\vec{Q}$ এর ক্ষেত্রে ডান হাতি স্ক্রুর অভিমুখ হবে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত মুখী (Anti-clockwise) এবং $\vec{Q}\times\vec{P}$ এর ক্ষেত্রে স্ক্রুর দিক হবে ঘড়ির কাঁটার দিক (Clock-wise)। পদার্থবিজ্ঞানে Anti-clockwise direction কে ধনাত্মক (positive) এবং Clockwise direction কে ঋণাত্মক (negative) ধরা হয়।

বিশেষ দ্রষ্টব্যঃ $\vec{P}$

ক) যখন $\alpha = 0^\circ$, তখন $\vec{R} = \vec{P}\times\vec{Q} = \hat{\eta}\,PQ\sin 0^\circ = 0$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর সমান্তরাল হয়।

খ) যখন $\alpha = 90^\circ$, তখন $\vec{R} = \vec{P}\times\vec{Q} = \hat{\eta}\,PQ\sin 90^\circ = PQ$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হয়।

গ) যখন $\alpha = 180^\circ$, তখন $\vec{R} = \vec{P}\times\vec{Q} = \hat{\eta}\,PQ\sin 180^\circ = -PQ$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর সমান্তরাল এবং বিপরীতমুখী হবে।



চিত্রঃ ১.২০

দৃষ্টান্তঃ

ধরা যাক, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের সাথে O বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়াশীল। $\overline{OA} = \vec{P}$ এবং $\overline{OC} = \vec{Q}$। এখন OABC সামান্তরিকের C বিন্দু হতে OA এর উপর CD লম্ব টানি।

$\therefore$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= OA \times CD = OA \times OC\sin\alpha = PQ\sin\alpha = |\vec{P}\times\vec{Q}|$

অতএব, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণফলের মানের সমান।

ভেক্টর গুণনের নিয়মাবলী:

i) $\vec{P}\times\vec{Q} = -(\vec{Q}\times\vec{P})$

ii) $\hat{i}\times\hat{i} = 1\times1\sin 0^\circ = 1\times1\times0 = 0$;

একইভাবে, $\hat{j}\times\hat{j} = 0$ এবং $\hat{k}\times\hat{k} = 0$

$\therefore\ \hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$

iii) $\hat{i}\times\hat{j} = \hat{\eta}\times1\times1\sin 90^\circ = \hat{\eta}\times1\times1\times1 = \hat{\eta}$; [$\hat{i}$ ও $\hat{j}$ পরস্পর লম্ব]

এখানে, $\hat{\eta} = \hat{k}\ \therefore\ \hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$

একইভাবে, $\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$ এবং $\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}\ \therefore\ \hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$, $\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$ এবং $\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$

গাণিতিক উদাহরণ ৪.১। $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{B} = p\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$ । p এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে?

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} \text{ এবং } \vec{B} = p\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$$

যদি $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর লম্ব হয়, তাহলে $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

অর্থাৎ, $(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}).(p\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}) = 0$

বা, $2p(\hat{i}\cdot\hat{i}) + 18(\hat{j}.\hat{j}) - 32(\hat{k}\cdot\hat{k}) = 0$

বা, $2p + 18 - 32 = 0$

বা, $2p = 14$

বা, $p = 7\ \therefore p = 7$

উত্তর: 7

সার-সংক্ষেপ :

- **ভেক্টর বা ক্রস গুণন:** দুটি ভেক্টর রাশির গুণফল যদি একটি ভেক্টর রাশি হয় তবে ঐ গুণনকে ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন বলে। এ ভেক্টরের গুণফলের মান ভেক্টর রাশি দুটির মান এবং তাদের মধ্যবর্তী কোনের সাইন (sine) এর গুণফলের সমান। ভেক্টর গুলফলের দিক ডানহাতি স্ক্রু নিয়মে নির্ণয় করা হয়।
- **স্কেলার বা ডট গুণন:** দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফল একটি স্কেলার রাশি হবে যার মান রাশি দুটির মানের গুণফলের সাথে তাদের মধ্যবর্তী কোনের কোসাইনের (cosine) এর গুণফলের সমান।
- **স্কেলার গুণনের নিয়মানুসারে:** $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$
- **ভেক্টর গুণনের নিয়মানুসারে:** $\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-১.৪

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন ।

১। কোন্ নিয়মটি প্রয়োগ করে ভেক্টরের দিক পাওয়া যায় ?

(ক) ফ্লেমিং এর বামহস্ত নিয়ম (খ) ফ্লেমিং এর দক্ষিণহস্ত নিয়ম

(গ) ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম (ঘ) বামহাতি স্ক্রু নিয়ম

২। $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর যদি পরস্পর লম্ব হয়, তাহলে লব্ধি $\vec{R}$ = কত ?

(ক) PQ (খ) 0 (গ) -PQ (ঘ) $-(\vec{P} \times \vec{Q})$

পাঠ-১.৫ ক্যালকুলাস Calculas

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- পদার্থবিজ্ঞানে ক্যালকুলাসের গুরুত্ব ও ব্যবহার বর্ণনা করতে পারবেন।
- অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণ ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- ভেক্টর ক্যালকুলাসের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

৪.১: পদার্থবিজ্ঞানে ক্যালকুলাসের ব্যবহার ও গুরুত্বঃ

আধুনিক পদার্থবিজ্ঞানের গাণিতিক অধ্যয়ন হলো ক্যালকুলাস। পদার্থবিজ্ঞানে ক্যালকুলাসের গুরুত্ব অপরিহার্য। চলমান কোনো অপরিবর্তী রাশিকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে ভাগ করা যায়। অনেক বাস্তব প্রক্রিয়া ডেরিভেটিভস (derivative) এর সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায়। কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ বিষয় বিশ্লেষণের জন্য time derivative সম্পর্কে ধারণা থাকা প্রয়োজন। কোনো কণা কোনো নির্দিষ্ট দিকে যে দূরত্ব অতিক্রম করে, সে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র দূরত্ব এবং সময়ের অনুপাত হচ্ছে বেগ। অর্থাৎ বেগ বস্তুর সরণের time derivative। নিউটনীয় পদার্থবিদ্যায় বস্তুর অবস্থানের time derivative এর ধারনা খুবই গুরুত্বপূর্ণ। একইভাবে ত্বরণ বস্তুর বেগের time derivative।

বেগ, ত্বরণ, মন্দন, বল, বক্ররেখার ঢাল ইত্যাদি হিসাবের জন্য ডিফারেন্সিয়াল ক্যালকুলাস ব্যবহার করা হয় এবং আয়তন, ক্ষেত্রফল, কাজ, চাপ ইত্যাদি ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাসের সাহায্যে হিসাব করা হয়। এছাড়া পদার্থবিজ্ঞানের গুরুত্বপূর্ণ ক্ষেত্র যেমন কঠিন বস্তুর বলবিদ্যা, তড়িৎ ও চৌম্বক ক্ষেত্র, কোয়ান্টাম বলবিদ্যা, আপেক্ষিক তত্ত্ব ইত্যাদি বিশ্লেষণ করার জন্য ক্যালকুলাসের বিশেষ প্রয়োজন রয়েছে।

ডিফারেন্সিয়াল ক্যালকুলাস (Differental Calculas):

ধরা যাক, একটি সরলরেখার উপর কোনো বস্তু চলমান আছে, কোনো সময়ে সরলরেখাটির উপর বস্তুর অবস্থান

$x(\mathrm{t}) = 9\mathrm{t}^2 + 7\mathrm{t} + 5$

সুতরাং বস্তুর বেগ, $\mathrm{v} = \dfrac{dx(\mathrm{t})}{d\mathrm{t}}$

$$= \frac{d}{dt}(9t^2 + 7t + 5)$$
$$= 18t + 7$$

এবং ত্বরণ, $a = \dfrac{dv}{dt}$

$$= \frac{d}{dt}(18t + 7)$$
$$= 18$$

নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্রটিকে ডিফারেন্সিয়াল (ব্যবকলনীয়) সমীকরণের সাহায্যে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়,

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d}{dt}\cdot\frac{dx(t)}{dt}$$
$$= m\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$= m\ddot{x}$$

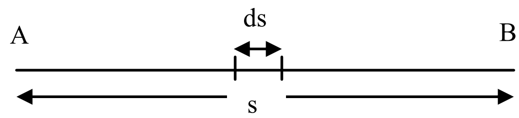
ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাস (Integral Calculas):

ধরা যাক, AB একটি সরলরেখা যার দৈর্ঘ্য AB=S। সরলরেখাটিকে অসংখ্য ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে বিভক্ত করা হল। প্রত্যেকটি ক্ষুদ্রতম অংশের দৈর্ঘ্য সমান। ধরি, এরূপ একটি ক্ষুদ্রতম অংশের দৈর্ঘ্যের মান ds।

অতএব এরূপ অসংখ্য ক্ষুদ্র অংশের সমষ্টি হচ্ছে s।

$\therefore \sum ds = s$ ....(১.২২)

এখানে "$\sum$" চিহ্নটি দ্বারা সমষ্টিকরণ বা যোগজীকরণ বুঝায়।



চিত্রঃ ১.২১

সমীকরণ (১.২২) কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়-

$\int ds = s$ ....(১.২৩)

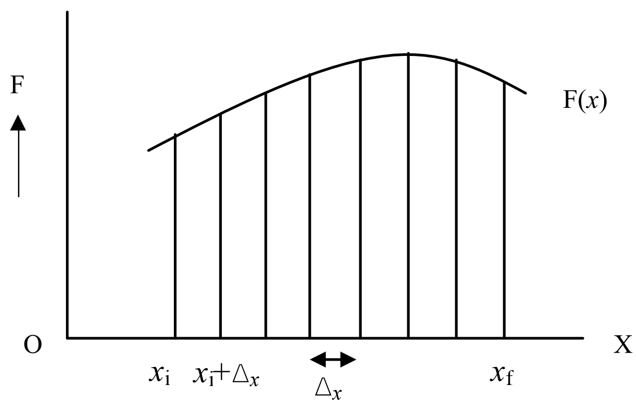
এখানে $\int$ প্রতিকটি দ্বারা সমাকলন বা যোগজীকরণ বুঝায়। ব্যবকলন বা অন্তরীকরণ এবং সমাকলন বা যোগজীকরণ পরস্পর বিপরীত প্রক্রিয়া।

উদাহরণঃ ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাসের সাহায্যে কাজ নির্ণয়ঃ

ধরা যাক, কোনো একটি বস্তুর উপর X অক্ষ বরাবর একটি পরিবর্তনশীল বল, F ক্রিয়াশীল আছে। এই বলের মান, বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব x এর উপর নির্ভর করে অর্থাৎ F, x এর একটি অপেক্ষক। চিত্রে, x এর বিভিন্ন মানের জন্য F এর মানের পরিবর্তন লেখচিত্রের মাধ্যমে দেখানো হল।

মোট সরণকে N সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করা হলো। ধরা যাক, প্রতিটি ক্ষুদ্র অংশের মান Δx। x_i থেকে $x_i+\Delta x$ পর্যন্ত সরণ হচ্ছে Δx। Δx পরিমাণ ক্ষুদ্র সরণকালে বলের মান প্রায় ধ্রুব থাকে এবং এই বলের মান F_1। সুতরাং, F_1 বল দ্বারা সম্পন্ন কাজ, $\Delta W_1 = F_1 \Delta x$

অনুরূপভাবে, $x_i+\Delta x$ থেকে $x_i+2\Delta x$ পর্যন্ত সরণ হচ্ছে Δx এবং এই অংশে ক্ষুদ্র বলের মান F_2। সুতরাং এই বল দ্বারা কৃত কাজ, $\Delta W_2 = F_2 \Delta x$



চিত্রঃ ১.২২

অতএব বস্তুটিকে x_i থেকে x_f পর্যন্ত সরণ ঘটাতে কৃত কাজ,

$$W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + ... + \Delta W_N$$

$$= F_1\Delta x + F_2\Delta x + F_3\Delta x + ... + F_N\Delta x$$

$$= \sum_{k=1}^{N} F_k \Delta x \quad \text{...... ....(১.২৪)}$$

Δx যত ক্ষুদ্র হবে অর্থাৎ N এর মান যত বেশী হবে হিসাবকৃত কাজের মান তত সঠিক পাওয়া যাবে। Δx কে শূন্য এবং N কে অসীম ধরে F(x) দ্বারা কৃত কাজের সঠিক মান হিসাব করতে পারি। এই অবস্থায়,

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{N} F_k \Delta x \quad \text{.......... ....(১.২৫)}$$

কিন্তু ক্যালকুলাসের মাধ্যমে (১.২৫) কে লেখা যায়,

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx \quad \text{.......... ....(১.২৬)}$$

যা দ্বারা x_i থেকে x_f পর্যন্ত x এর যোগজীকরণ বুঝায়।

৫.২: ভেক্টর ক্যালকুলাস (Vector Calculas):

ভেক্টর ক্যালকুলাস দুই প্রকার।

ক) ভেক্টর অন্তরীকরণ (Vector Differentiation)

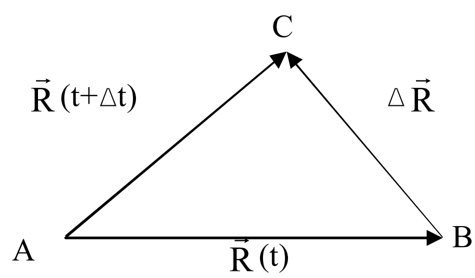
খ) ভেক্টর যোগজীকরণ (Vector Integration)

ক) ভেক্টর অন্তরীকরণ (Vector Differentiation): ধরা যাক, $\vec{R}(t)$ একটি ভেক্টর যা সময় t এর উপর নির্ভরশীল। সুতরাং R , t এর অপেক্ষক।

চিত্রানুযায়ী, $\overrightarrow{AB} = \vec{R}(t)$, $\overrightarrow{AC} = \vec{R}(t+\Delta t)$
এবং $\overrightarrow{BC} = \Delta\vec{R}$

তাহলে Δt সময়ে $\vec{R}(t)$ এর পরিবর্তন হবে

$\Delta\vec{R} = \vec{R}(t+\Delta t) - \vec{R}(t)$ ....(১.২৭)



চিত্র: ১.২৩

সময় সাপেক্ষে $\vec{R}(t)$ এর পরিবর্তনের হার

$$\frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t} = \frac{\vec{R}(t+\Delta t) - \vec{R}(t)}{\Delta t}$$

সময়ের পরিবর্তন অতি ক্ষুদ্র হলে t এর সাপেক্ষে $\vec{R}(t)$ এর পরিবর্তনের হার লেখা যায়

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\vec{R}(t+\Delta t) - \vec{R}(t)}{\Delta t} \text{ ....(১.২৮)}$$

$\frac{d\vec{R}}{dt}$ হচ্ছে t এর ক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য t এর সাপেক্ষে $\vec{R}$ এর পরিবর্তনের হার। একে ভেক্টরের সময় সাপেক্ষে অন্তরীকরণও বলা হয়।

অতএব, $\frac{d\vec{R}}{dt}$ এর মান নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকে অন্তরীকরণ বা ব্যবকলন বলা হয়। $\frac{d}{dt}$ কে $\vec{R}$ এর অন্তরক সহগ (differential coefficient) বলে।

এখানে $\vec{R}$ একটি ভেক্টর রাশি এবং t একটি স্কেলার রাশি। কোনো স্কেলার রাশির সাপেক্ষে ভেক্টর রাশির অন্তরীকরণ ভেক্টর রাশি হয় এবং স্কেলার রাশির অন্তরীকরণ স্কেলার রাশি হবে।

যদি $\vec{R}$ কে উপাংশের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয় তাহলে,

$$\vec{R} = \hat{i}R_x + \hat{j}R_y + \hat{k}R_z \text{ ....(১.২৯)}$$

এখানে R_x, R_y, R_z হলো X, Y, ও Z অক্ষের দিকে $\vec{R}$ ভেক্টরের মান নির্দেশ করে। R_x, R_y, R_z উপাংশগুলো হলো সময়, t এর অপেক্ষক। কিন্তু $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$ ধ্রুবক এবং সময়ের সাপেক্ষে এদের কোনো পরিবর্তন হয় না। সুতরাং $\vec{R}$ কে উপাংশে প্রকাশ করলে এর অন্তরীকরণ হবে,

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \hat{i}\frac{dR_x}{dt} + \hat{j}\frac{dR_y}{dt} + \hat{k}\frac{dR_z}{dt} \text{ ....(১.৩০)}$$

ভেক্টর সমাকলন বা যোগজীকরণ (Vector Integration):

ধরা যাক, $\vec{R}(u)$ একটি ভেক্টর রাশি।

$\therefore\ \vec{R}(u) = \hat{i}\,R_1(u) + \hat{j}R_2(u) + \hat{k}\,R_3(u)$; একটি ভেক্টর যা স্কেলার রাশি u এর অপেক্ষক

অর্থাৎ $\vec{R} = \vec{R}(u)$

এখন, $\int \vec{R}(u)du = \hat{i}\int R_1(u)du + \hat{j}\int R_2(u)du + \hat{k}\int R_3(u)du$ কে $\vec{R}(u)$ এর অনিদির্ষ্ট যোগজীকরণ (indefinite integral) বলা হয়।

আবার, যদি এমন একটি ভেক্টর $\vec{S}(u)$ ধরা হয় যেখানে $\vec{R}(u) = \frac{d}{du}[\vec{S}(u)]\,du$,

তাহলে $\int \vec{R}(u)du = \int \vec{S}(u)du = \vec{S}(u) + C$; যেখানে C একটি যোগজীকরণ ধ্রুবক

অর্থাৎ $\vec{C} = \hat{i}\,C_1 + \hat{j}C_2 + \hat{k}\,C_3$

u এর মান a হতে b সীমার মধ্যে হলে $\int \vec{R}(u)du$ লেখা যায়,

$$\int_a^b \vec{R}(u)du = \int_a^b \frac{d}{du}\left[\vec{S}(u)\right]du = \left[\vec{S}(u)\right]_a^b = \vec{S}(b) - \vec{S}(a) \quad \text{......................................(১.৩১)}$$

৫.৩: ভেক্টর অপারেটর (vector operator):

অপারেটর এর আভিধানিক অর্থ হল চালক বা সংঘটক। কিন্তু পদার্থবিজ্ঞান তথা বিজ্ঞানে অপারেটর হচ্ছে এক ধরণের সংকেত বা প্রতীক। এর নিজস্ব কোন মান নেই কিন্তু এর সাহায্যে বিভিন্ন জটিল বিষয় বিশ্লেষণ এবং সমাধান করা যায়। যেমন বর্গ (^{2}), ঘন (^{3}), বর্গমূল (√), sin, cos, log ইত্যাদি। তবে এরা যখন অন্য কোনো রাশির সাথে যুক্ত হয় তখন একটি নির্দিষ্ট মান বহন করে। যেমন $2^2=4$, $3^2=9$, $\sqrt{16}=4$, $\cos 60^\circ=0.5$ ইত্যাদি।

অর্থাৎ যে গাণিতিক চিহ্নের ব্যবহার করে কোনো রাশির মান পাওয়া যায় বা কোনো পরিবর্তনশীল রাশির বিশ্লেষণ করা যায়, তাকে অপারেটর বলা হয়।

t এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করা হলে $\frac{d}{dt}$ লেখা হয়; তাহলে $\frac{d}{dt}$ একটি অপারেটর। এভাবে x এর সাপেক্ষে $\frac{d}{dx}$ ইত্যাদি।

ভেক্টর ক্যালকুলাসে অপারেটর "$\vec{\nabla}$" চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং একে ‘ডেল’ উচ্চারণ করা হয়। উপাংশের সাহায্যে একে নিম্নরূপভাবে প্রকাশ করা হয়।

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{......................................(১.৩২)}$$

$\vec{\nabla}$ কে ন্যাবলা নামেও অভিহিত করা হয়।

$\vec{\nabla}$ কে ভেক্টর ডিফারেন্সিয়াল অপারেটর বলা হয়।

সাধারণ ভেক্টরের মত এর ভেক্টর ধর্ম রয়েছে।

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$ এটি একটি স্কেলার রাশি।

৫.৪: স্কেলার ক্ষেত্র ও ভেক্টর ক্ষেত্র (Scalar field and vector field):

যদি একটি ক্ষেত্র বিবেচনা করা হয়, তাহলে ক্ষেত্রের প্রতিটি বিন্দুর সাথে কিছু ভৌত গুণাবলী থাকে। ক্ষেত্রের সাথে ভৌত গুণ যদি স্কেলার হয়, তবে ঐ ক্ষেত্রকে স্কেলার ক্ষেত্র বলা হয়। যেমন ঘনত্ব, তাপমাত্রা, কাজ ইত্যাদি স্কেলার ক্ষেত্র।

আবার ক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট ভৌত গুণ যদি ভেক্টর হয়, তবে ঐ ক্ষেত্রকে ভেক্টর ক্ষেত্র বলা হয়। যেমন বল, বেগ, মহাকর্ষ, প্রাবল্য ইত্যাদি ভেক্টর ক্ষেত্র।

৫.৫: ভেক্টর অপারেটর ব্যবহার (Uses of vector operator):

ভেক্টর অপারেটরের সাহায্যে তিনটি রাশি তৈরী করা হয় যেগুলো পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন সূত্র ও তত্ত্ব ব্যাখ্যা করতে খুবই প্রয়োজন হয়। এগুলো হলো গ্র্যাডিয়েন্ট (Gradient), ডাইভারজেন্স (Divergence) এবং কার্ল (Curl)।

গ্র্যাডিয়েন্ট (Gradient): ভেক্টর ডিফারেন্সিয়াল অপারেটর $\vec{\nabla}$ এর সাথে কেনো স্কেলার রাশির গুণফলকে গ্র্যাডিয়েন্ট (Gradient) বলে।

ধরা যাক, ϕ (x, y, z) একটি স্কেলার রাশি। তাহলে ϕ এর গ্র্যাডিয়েন্টকে $\vec{\nabla}\phi$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ, $\text{grad}\,\phi = \vec{\nabla}\phi = (\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}).\,\phi = \hat{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial \phi}{\partial z}$

গ্র্যাডিয়েন্ট এর ভৌত তাৎপর্য (Physical Significances of gradient):

(i) স্কেলার রাশির গ্র্যাডিয়েন্ট একটি ভেক্টর রাশি।

(ii) উক্ত ভেক্টর রাশির মান ঐ স্কেলার রাশির সর্বাধিক বৃদ্ধির হারের সমান।

(iii) স্কেলার রাশির পরিবর্তন শুধু বিন্দুর স্থানাঙ্কের উপর নির্ভর করে না, বরং যেদিকে এর পরিবর্তন দেখানো হয় সেদিকের উপরেও নির্ভর করে।

ডাইভারজেন্স (Divergence): ভেক্টর ডিফারেন্সিয়াল অপারেটর, $\vec{\nabla}$ এর সাথে অন্য কোনো ভেক্টর রাশির স্কেলার বা ডট গুনফলকে ডাইভারজেন্স বলে।

ধরা যাক, $\vec{V}$ একটি ভেক্টর রাশি, তাহলে ডাইভারজেন্সকে $\vec{\nabla}.\vec{V}$ বা div. $\vec{V}$ লিখে প্রকাশ করা যায়।
গাণিতিকভাবে লেখা যায়,

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = (\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}).(\hat{i}V_x + \hat{j}V_y + \hat{k}V_z)$$

$$= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$; যা একটি স্কেলার রাশি।

ডাইভারজেন্সের ভৌত ধর্ম:

(i) ডাইভারজেন্স একটি ভেক্টর রাশি যা দ্বারা একক আয়তনে এই ভেক্টর রাশির মোট কতটুকু ফ্লাক্স কোনো বিন্দু দিয়ে অভিমুখী বা অপসারিত হচ্ছে তা প্রকাশ করে। $\vec{\nabla}.\vec{V}$ বা div. $\vec{V}$ দ্বারা একক সময়ে কোনো তরল পদার্থের একক আয়তনে ঘনত্বের পরিবর্তনের হার বুঝায়।

(ii) মান ধনাত্মক হলে তরল পদার্থের আয়তন বৃদ্ধি পায়, ঘনত্বের হ্রাস ঘটে।

(iii) মান ঋণাত্মক হলে আয়তনের সংকোচন ঘটে, ঘনত্ব বৃদ্ধি পায়।

(iv) মান শূন্য হলে, আগত ও নির্গত ফ্লাক্স সমান হয়।

(v) কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স শুন্য হলে অর্থাৎ যদি $\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$ হয়, তাহলে ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রকে সলিনইডাল (Solenoidal) বলে।

কার্ল (Curl): ভেক্টর ডিফারেন্সিয়াল অপারেটর, $\vec{\nabla}$ এর সাথে অন্য কোনো ভেক্টর রাশির ভেক্টর বা ক্রস গুণনকে কার্ল বলা হয়।

ধরা যাক, ত্রিমাত্রিক স্থানে ভেক্টর ফাংশন, $\vec{V}(x, y, z) = (\hat{i}V_x + \hat{j}V_y + \hat{k}V_z)$

তাহলে $\vec{\nabla}$ এর কার্লকে গাণিতিকভাবে লেখা যায়,

$$\text{Curl } \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$$

$$= (\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}) \times (\hat{i}V_x + \hat{j}V_y + \hat{k}V_z)$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{bmatrix}$$

কার্ল এর ভৌত ধর্ম:

(i) কার্ল একটি ভেক্টর রাশি যার মান ভেক্টর ক্ষেত্রে একক ক্ষেত্রের জন্য সর্বাধিক রেখা ইন্টিগ্রাল এর সমান।

(ii) নতুন ভেক্টরটির দিক এই ক্ষেত্রের উপর অংকিত লম্ব বরাবর ক্রিয়া করে।

(iii) রৈখিক বেগ $\vec{V}$ এর কার্ল কৌণিক বেগ $\vec{\omega}$ এর দ্বিগুণ হয়।

অর্থাৎ $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 2\vec{\omega}$

(iv) কোনো বিন্দুর চারদিকে ভেক্টরটি কতবার ঘুরে তা কার্ল নির্দেশ করে।

(v) যদি কোনো ভেক্টরের কার্ল শূন্য হয় তাহলে ভেক্টর ক্ষেত্রটি অঘুর্ণনশীল বুঝায়।

রেখা ইন্টিগ্রাল (line integral):

যদি $\vec{V}$ (x, y, z) একটি ভেক্টর ক্ষেত্র হয়, তাহলে কোনো আবদ্ধ পথে ভেক্টরের রেখা ইন্টিগ্রাল $\oint \vec{V} \cdot d\vec{l}$ । এখানে $d\vec{l}$ আবদ্ধ পথের একটি অংশ যার পরিমাণ dl এবং অভিমুখ ঐ অংশের স্পর্শক বরাবর।

সার-সংক্ষেপ :

- **অপারেটর:** যে গাণিতিক চিহ্নের দ্বারা একটি রাশিকে অন্য একটি রাশিতে রুপান্তর করা যায় বা কোনো পরিবর্তনশীল রাশির ব্যাখ্যা দেওয়া যায় তাকে অপারেটর বলে।
- **গ্র্যাডিয়েন্ট:** ভেক্টর ডিফারেন্সিয়াল অপারেটরের সাথে অন্য কোনো স্কেলার রাশির গুণফলকে গ্র্যাডিয়েন্ট বলে।
- **ডাইভারজেন্স:** ত্রিমাত্রিক ব্যবস্থায় R অঞ্চলে কোনো একটি ভেক্টর ক্ষেত্রের অবস্থান ভেক্টর $\vec{V}(x, y, z) = V_1(x,y,z)\,\hat{i} + V_2(x,y,z)\,\hat{j} + V_3(x,y,z)\,\hat{k}$ । তাহলে $\vec{\nabla}$ অপারেটরের সাথে $\vec{V}$ এর স্কেলার গুণফলকে ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স বলা হয়।
- **কার্ল:** কোনো ত্রিমাত্রিক স্থানে কোনো বিন্দুর যথার্থ ভেক্টর ফাংশন $\vec{V}(x, y, z) = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$ । তাহলে $\vec{\nabla}$ অপারেটরের সাথে $\vec{V}$ এর ক্রস বা ভেক্টর গুণন দ্বারা তাৎক্ষনিকভাবে ঘূর্ণন অক্ষের দিকে একটি ভেক্টর পাওয়া যায়। এ ধরনের গুণনকে কার্ল বলে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-১.৫

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন:

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন ।

১। ভেক্টর অপারেটর-

i. grad ϕ একটি ভেক্টর।

ii. Curl $\vec{F}$ একটি ভেক্টর।

iii. div $\vec{V}$ একটি ভেক্টর।

নিচের কোন্‌টি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

২। div $\vec{V}$ কে নিম্নোক্ত কোনটি দ্বারা প্রকাশ করা হয়?

(ক) $\vec{\nabla}\,.\,\vec{V}$ (খ) $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ (গ) $\vec{\nabla}+\vec{V}$ (ঘ) $\vec{\nabla}-\vec{V}$

চূড়ান্ড় মূল্যায়ন

ক. সাধারণ বহুনির্বাচনী প্রশ্ন ঃ

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (√) চিহ্ন দিন ।

১। যা পরিমাপ করা যায়, তাকে বলা হয়-

(ক) অপদার্থ (খ) ধাতু (গ) রাশি (ঘ) মাত্রা

২। একটি ডিফারেন্সিয়াল অপারেটর ‘ $\vec{\nabla}$ ’ এর ক্ষেত্রে নিচের কোন তথ্যটি সঠিক?

(ক) একটি ভেক্টর রাশি (খ) ভেক্টরের মতো আচরণ করে

(গ) শুধুমাত্র ভেক্টর রাশির ক্ষেত্রে প্রয়োজ্য (ঘ) $\vec{\nabla}$ দিয়ে প্রকাশ করা আবশ্যক

৩। $\hat{k}\times\hat{k}$ একক ভেক্টরের গুণফল কোনটি?

(ক) $\hat{k}\times\hat{k}=1$ (খ) $\hat{k}\times\hat{k}=\hat{j}$ (গ) $\hat{k}\times\hat{k}=0$ (ঘ) $\hat{k}\times\hat{k}=\hat{i}$

৪। দুটি ভেক্টর রাশি পরস্পর বিপরীতমুখী হয়ে ক্রিয়া করলে-

i. এদের মধ্যবর্তী কোণ হবে।

ii. এদের লব্ধির মান সর্বোচ্চ হবে।

iii. লব্ধির দিক হবে বৃহত্তম ভেক্টরের দিকে।

নিচের কোন্‌টি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৫। ভেক্টর অপারেটরের ক্ষেত্রে-

i. $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=0$

ii. $\nabla\times\left(\nabla p\right)=0$

iii. $\text{div curl } A=0$

নিচের কোন্‌টি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

খ. সৃজনশীল প্রশ্ন

$\vec{P}$, $\vec{Q}$ ও $\vec{R}$ তিনটি ভেক্টর যেখানে $\vec{P} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{Q} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{R} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ ।

ক) ভেক্টর গুণন কি? ১

খ) ভেক্টর যোগের সামন্তরিক সূত্রটি বিবৃত করুন। ২

গ) $\vec{P}$ এর উপর $\vec{Q}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় করুন। ৩

ঘ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ করুন যে, $\vec{P}.(\vec{Q} \times \vec{R}) = (\vec{P} \times \vec{Q}).\vec{R}$ ৪

গ. সংক্ষিপ্ত উত্তর প্রশ্ন ঃ

১। একক ভেক্টর, শূন্য ভেক্টর ও অবস্থান ভেক্টরের সংজ্ঞা দিন।

২। স্কেলার গুণন ও ভেক্টর গুণনের সংজ্ঞা দিন।

৩। ভেক্টর অপারেটর কি এবং এর গাণিতিক রূপ লিখুন।

৪। কার্ল এর ভৌতিক তাৎপর্য লিখুন।

৫। বহুভুজ সূত্রটি বিবৃত করুন।

ঘ. বিশদ উত্তর প্রশ্ন ঃ

১। সামান্তরিক সূত্রটি বিবৃত ও ব্যাখ্যা করুন।

২। দেখান যে, সমজাতীয় দুটি ভেক্টরের লব্ধির সর্বনিম্নমান ভেক্টরদ্বয়ের মানের বিয়োগফলের সমান।

৩। ভেক্টর বিভাজন বর্ণনা করুন এবং ভেক্টর রাশির অনুভূমিক ও উলম্ব উপাংশ এর মান বের করুন।

৪। ডানহাতি স্ক্রু নিয়মটি ব্যাখ্যা করুন।

ঙ. গাণিতিক সমস্যা ঃ

১। যদি $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ এবং $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ হয়, তাহলে $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)$ এর মান নির্ণয় করুন।

২। একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টরের মান সমান। প্রমাণ করুন যে, এদের লব্ধি ভেক্টর দ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

৩। $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করুন।

৪। দেখান যে, $\vec{\nabla}\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \vec{\nabla}.\vec{A} + \vec{\nabla}.\vec{B}$ ।

৫। $\vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 15\hat{i} + m\hat{j} + 9\hat{k}$ । m এর মান কত হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে?

৫। $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে প্রমাণ করুন যে, $\vec{A}.\left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \times \vec{B}\right).\vec{C}$

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-১.১:	১। (ক)	২। (ক)
পাঠোত্তর মূল্যায়ন-১.২:	১। (ঘ)	২। (গ)
পাঠোত্তর মূল্যায়ন-১.৩:	১। (ক)	২। (খ)
পাঠোত্তর মূল্যায়ন-১.৪:	১। (গ)	২। (ক)
পাঠোত্তর মূল্যায়ন-১.৫:	১। (ঘ)	২। (ক)

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

ক. সাধারণ বহুনির্বাচনী প্রশ্ন ঃ ১। (গ) ২। (খ) ৩। (গ) ৪। (খ) ৪। (ঘ)

খ. সৃজনশীল প্রশ্ন ঃ- নিজে ব্যাখ্যা করুন। টিউটরের সহায়তা নিন

ঙ. গাণিতিক সমস্যা ঃ ১। $-\frac{\vec{r}}{r^3}$ ৩। 79.01° ৫। 6